18.10.2019

Studienvorkurs Mathematik

Übungsblatt 5

1. Aufgabe:

Sei S_3 die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Geben Sie alle Elemente von S_3 an.

2. Aufgabe:

Wir betrachten die Betragsabbildung

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung. Untersuchen Sie die diese Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

3. Aufgabe:

Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien

$$f^+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases}$$

und

$$f^-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{falls } f(x) > 0. \end{cases}$$

Beschreiben Sie f und die Abbildung

$$|f|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$$

durch f^+ und f^-.

4. Aufgabe:

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x$,
(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax+b$, für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,
(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$,

5. Aufgabe:

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - 5$,
(b) $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (2x, -x)$,
(c) $g_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy - 1$,
(d) $g_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (2x+y, -x+y)$.

6. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

bijektiv ist.

7. Aufgabe:
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \text{ mit } g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N}, x \neq 0, \\ x-1 & \text{falls } -x \in \mathbb{N}, x \neq 0, \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

bijektiv ist.