Funktionentheorie I

Prof. Dr. Hans-Jörg Reiffen

Sommersemester 2001

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Fachbereich Mathematik/Informatik
49069 Osnabrück
Germany

Die Funktionentheorie ist die Analysis über dem Zahlkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Diesen begegnet der Mathematikstudent bereits in den ersten Semester im Rahmen der Anfängerkurse. Deshalb hat der Anfang dieser Vorlesung z.T. wiederholenden Charakter.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1 Die komplexen Zahlen

Wir beginnen mit der Definition der komplexen Zahlen.

1.1 Definition und Satz: Sei $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Für $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\begin{aligned} a + b &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ a \cdot b &:= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper, der *Körper* der *komplexen Zahlen*. Seine Elemente heißen komplexe Zahlen. –

Beweis: Bekanntlich ist $\mathbb{R}^2$, also $\mathbb{C}$, mit den üblichen Rechenoperationen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Insbesondere $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe.

$$0 = (0, 0)$$

ist das Nullelement; für $a = (a_1, a_2)$ ist

$$-a = (-a_1, -a_2).$$

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ wie oben. Dann ist

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ b \cdot a &= (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_1 a_2 + b_2 a_1). \end{aligned}$$

Also ist

$$a \cdot b = b \cdot a$$

die Multiplikation ist kommutativ. Analog zeigt man, daß die Multiplikation assoziativ ist und daß das Distributivgesetz gilt.
Sei wieder $a = (a_1, a_2)$. Dann ist

$$a \cdot (1, 0) = (a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1) = a.$$

Also ist $(1, 0)$ neutrales Element bzgl. der Multiplikation, d.h. $(1, 0)$ ist das Einselement.
Ist $a \neq (0, 0)$, so ist $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, und es gilt für

$$\begin{aligned} a' &:= \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right), \\ a \cdot a' &:= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_1 a_2 + a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2} \right) = (1, 0). \end{aligned}$$

Ergebnis: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

1.2 $\mathbb{R}$ ist in natürlicher weise ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Genauer:

$$\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \alpha \mapsto (\alpha, 0),$$

ist ein injektiver Homomorphismus von Ringen.–

Wir identifizieren im weiteren $\mathbb{R}$ mit $\iota(\mathbb{R})$, schreiben also α für $(\alpha, 0)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
Beweis: Offensichtlich ist ι injektiv. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \iota(\alpha + \beta) &= (\alpha + \beta, 0) &&= (\alpha, 0) + (\beta, 0) = \iota(\alpha) + \iota(\beta), \\ \iota(\alpha \cdot \beta) &= (\alpha \cdot \beta, 0) &&= (\alpha \cdot \beta - 0 \cdot 0, \alpha \cdot 0 + 0 \cdot \beta) \\ & &&= (\alpha, 0) \cdot (\beta, 0) = \iota(\alpha) \cdot \iota(\beta). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\iota(1) = (1, 0)$$

das Einselement von $\mathbb{R}$.

1.3 Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$(\alpha, 0) \cdot a = (\alpha a_1, \alpha a_2).–$$

1.3 zeigt, daß bei Identifikation von $\mathbb{R}$ mit $\iota(\mathbb{R})$ das Produkt $\alpha \cdot a$ dasselbe Ergebnis liefert, gleichgültig ob man es als Produkt in $\mathbb{C}$ oder als Rechnung im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ interpretiert.

Beweis:

$$\begin{aligned}(\alpha,0)\cdot a &= (\alpha,0)\cdot(a_1,a_2)\\ &= (\alpha a_1 - 0a_2, \alpha a_2 + 0a_1)\\ &= (\alpha a_1, \alpha a_2).-\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2.

$$1 = (1,0) \text{ und } (0,1)$$

bilden eine Basis.

1.4 Definition:

$$\mathrm{i} := (0,1)$$

heißt imaginäre Einheit.–

1.5 (1) $\mathrm{i}^2 = -1$.

(2) Für $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ ist $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$.-

Beweis:

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{i}^2 &= (0,1)\cdot(0,1)\\ &= (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0)\\ &= (-1,0) = -(1,0) = -1.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}a_1 + \mathrm{i}a_2 &= (a_1,0) + (0,1)\cdot(a_2,0)\\ &= (a_1,0) + (0\cdot a_2 - 1\cdot 0, 0\cdot 0 + 1\cdot a_2)\\ &= (a_1,0) + (0,a_2) = a.\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen werden wir im weiteren in der Regel, wie folgt, notieren

$$\begin{aligned}z &= x + \mathrm{i}y, \quad x,y \in \mathbb{R};\\ w &= u + \mathrm{i}v, \quad u,v \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Man darf nun die etwas komplizierte Definition der Multiplikation vergessen. Sie ist aus der Regel $\mathrm{i}^2 = -1$ und den Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ rekonstruierbar. Seien x, w wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned}z\cdot w &= (x + \mathrm{i}y)\cdot \mathrm{i}y(u + \mathrm{i}v)\\ &= x\cdot(u + \mathrm{i}v) + \mathrm{i}y(u + \mathrm{i}v)\\ &= xu + \mathrm{i}xv + \mathrm{i}yu - yv\\ &= (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu).\end{aligned}$$

1.6 Definition: Sei $z \in \mathbb{C}; z = x + \mathrm{i}y; x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{array}{l} \mathrm{Re}\, z := x \text{ der } \textit{Realteil}, \\ \mathrm{Im}\, z := y \text{ der } \textit{Imaginärteil} \end{array}$$

von z.

$$\bar{z} := x - \mathrm{i}y$$

heißt die zu z *konjugierte* komplexe Zahl . –

Offensichtlich bedeutet die Konjugation, d.h. die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z},$$

die Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt:

$$\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}.$$

Man beweist sofort:

1.7

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Re} : & \mathbb{C} \to \mathbb{R}, & z \mapsto \mathrm{Re}\, z, \\ \mathrm{Im} : & \mathbb{C} \to \mathbb{R}, & z \mapsto \mathrm{Im}\, z, \\ \kappa : & \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & z \mapsto \bar{z} \end{array}$$

sind $\mathbb{R}$-linear. –

zwischen den Abbildungen in 1.7 besteht der folgende Zusammenhang:

1.8 Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - barz) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \bar{z}).-$$

Beweis: Sei $z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist
$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$

und es gilt:

$$\begin{array}{ll} z + \bar{z} = 2x, & \text{also } x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \\ z - \bar{z} = 2\mathrm{i}y, & \text{also } y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) \end{array}$$

Die letzte Gleichung folgt aus:

1.9 Es ist $\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ und $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.–

Beweis: Es ist $i = 0 + 1 + i$, also $\bar{i} = 0 - 1 \cdot i = -i$ und

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{\bar{i}}{-i^2} = -i.$$

1.10 Weitere Rechenregeln für die Konjugation:

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$,

(2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$,
$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,

(3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, falls $w \neq 0$.-

Beweis: Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

(1) : Es ist

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y = z.$$

(2) : Es ist

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{(x+u) + i(y+v)} \\ &= (x+u) - i(y+v) \\ &= (x - iy) + (u - iv) = \overline{z} + \overline{w}. \end{aligned}$$

Analog beweist man die zweite Regel unter (2). Im übrigen folgen die beiden ersten Regeln unter (2) auch aus 1.7.

Es ist

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(xu - yu) + i(xv + yu)} \\ &= (xu - yu) - i(xv + yu) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{z} \cdot \overline{w} &= (x - iy) \cdot (u - iv) \\ &= (xu - yu) - i(xv + yu) \end{aligned}$$

also $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(3) Offensichtlich gilt: $w \neq 0 \iff \overline{w} \neq 0$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad &\iff \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \cdot \overline{w} = \overline{z} \\ &\iff \quad \overline{\left(\frac{z}{w} \cdot w\right)} = \overline{z} \iff \overline{z} = \overline{z}. \end{aligned}$$

Aus 1.10, (1) und (2), sowie $\overline{\alpha} = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt:

1.11 $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein Isomorphismus von Ringen.–

Aus 1.9 folgt übrigens ebenfalls 1.8, (3).

1.12 Definition: Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z.–

$|z|$ ist der Abstand des Punktes z von 0. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ stimmen der reelle und der komplexe Betrag überein. Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|z - w|$ der Abstand zwischen z und w.

1.13 Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(2) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

(3) $|\bar{z}| = |z|$.

(4) $|\mathrm{Re} z| \leq |z|, |\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$.-

Beweis: (1) und (3) sind klar.
(2): Es ist

$$\begin{aligned} |z|^2 &= x^2 + y^2, \\ z \cdot \overline{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) \\ &= x^2 + y^2 + i(yx - xy) = x^2 + y^2, \end{aligned}$$

(4): $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$.
Analog: $|z| \geq |\mathrm{Im}\ z|$.
Aus 1.13, (2) folgt übrigens die sehr nützliche Rechenregel:

1.14 Seien $z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Dann ist

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}.–$$

1.15 Weitere Rechenregeln für den Betrag:
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(2) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, falls $w \neq 0$.

(3) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

(4) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.-

Beweis:

(1): $|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$.

(2): $\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z}{v}\right| \iff \left|\frac{z}{w}\right| \cdot |w| \iff \left|\frac{z}{w} \cdot w\right| = |z|$

$$\begin{array}{lrcl}
(3): & |z+w|^2 & = & (z+w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\
 & & = & |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2 \\
 & & = & |z|^2 + 2Re\ z\overline{w} + |w|^2 \\
 & & \leq & |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
 & & = & |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \\
 & |z-w| & \leq & |z| + |-w| = |z| + |w|.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
(4): & |z| & = & |z - w + w| \leq |z - w| + |w|, \\
 & & & |z - w| \geq +|z| - |w|, \\
 & & & |z - w| = |w - z| \geq |w| - |z|; \\
 & & & |z - w| \geq \big||z| - |w|\big|.
\end{array}$$

Die Addition komplexer Zahlen ist die übliche Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ und hat damit die bekannte geometrische Bedeutung. Aber auch die Multiplikation besitzt eine geometrischen Bedeutung.

1.16 Polarkoordinatendarstellung:

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Ist $z \neq 0$ und ist $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Zahl $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$ mit $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.–

1.16 ist die übliche Polarkoordinatendarstellung der Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$.

1.17 Satz: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und

$$a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha), \quad b = |b|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta).$$

Dann ist

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\big).-$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a|\,|b|\,(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= |a|\,|b|\,(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}(\sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann bedeutet das Addieren von a das Translatieren um den Vektor a, und das Multiplizieren mit a bedeutet Drehen um den zu a gehörenden Winkel sowie Strecken um $|a|$.

2 Die Topologie von $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ heißt auch GAUSS*sche Zahlenebene*. Wir haben für $\mathbb{C}$ die üblichen geometrischen und topologischen Begriffe zur Verfügung.

2.1 Bezeichnungen: Für $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*$ sei

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

und

$$\bar{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Die offene Einheitskreisscheibe $D(0,1)$ notieren wir mit D, die abgeschlossene mit $\bar{D}$. Außerdem sei

$$S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.-$$

Unter einem *Bereich* von $\mathbb{C}$ verstehen wir eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, unter einem *Gebiet* in $\mathbb{C}$ verstehen wir einen zusammenhängenden Bereich. Ist $A \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, so notieren wir $A \mathrel{\subset\!\!\!\!\circ} \mathbb{C}$. Das "o" in diesem Symbol soll an "offen" erinnern.

Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann notieren wir, wie üblich, mit $\mathring{A}$ das Innere von A und mit $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A. Den Rand von A, also $\bar{A} \setminus \mathring{A}$ notieren wir mit ∂A.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Unter einer *Umgebung* von z_0 verstehen wir eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ mit $z_0 \in \mathring{U}$. Sei $A \subset \mathbb{C}$. Unter einer Umgebung von A verstehen wir eine Teilmenge U von $\mathbb{C}$ mit $A \subset \mathring{U}$.

Sei $M \subset \mathbb{C}$. Eine Teilmenge A von M heißt *relativ-offen* in M, kurz *M-offen*, wenn es eine offene Teilmenge $\tilde{A}$ von $\mathbb{C}$ gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$. A heißt *relativ-abgeschlossen* in M, kurz *M-abgeschlossen*, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{A}$ von $\mathbb{C}$ gibt mit $A = \tilde{A} \cap M$.

Wir erinnern an den Begriff der Konvergenz: Sei $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ gibt, so daß folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad |z_\nu - z| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

z ist dann eindeutig bestimmt und heißt der Limes der Folge $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Wir schreiben

$$z = lim_{\nu \to \infty} z_\nu \text{ oder } z = \lim z_\nu \text{ oder } z_\nu \to z.$$

Die folgende Aussage ist aus der Analysis-Vorlesung bekannt:

2.1 Sei $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $z_\nu \to z$,
2. zu jeder Umgebung U von z gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_\nu \in U \quad \forall \nu \geq \nu_0$,
3. Re $z_\nu \to \operatorname{Re} z, \operatorname{Im}$ $z_\nu \to$ Im z.–

Im übrigen gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium.

2.2 Sei $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt: $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit:

$$|z_\nu - z_\mu| < \varepsilon \quad \forall \nu, \mu \geq \nu_0.–$$

Zur Übung behandeln wir den

Beweis: Die eine Beweisrichtung erledigen wir wie im reellen Fall. Es gelte $z_\nu \to z$. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vorgegeben. Dann gilt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_\nu - z| < \varepsilon/2 \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

Es folgt für $\nu, \mu \geq \nu_0$:

$$\begin{aligned} |z_\nu - z_\mu| &= |(zi_\nu - z) - (z_\mu - z)| \\ &= \leq |z_\nu - z| + |z_\mu - z| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Bei der anderen Beweisrichtung benutzen wir die entsprechende Aussage für $\mathbb{R}$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dann existiert ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_\nu - z_\mu| < \varepsilon \; \forall \nu, \mu \geq \nu_0$. Es folgt

$$\begin{aligned} |\text{Re } z_\nu - \text{Re } z_\mu| &= |\text{Re } (z_\nu - z_\mu)| \\ &\leq |z_\nu - z_\mu| < \varepsilon \; \forall \nu, \mu \geq \nu_0 \end{aligned}$$

analog:

$$|\text{Im } z_\nu - \text{Im } z_\mu| < \varepsilon \ \forall \nu, \mu \geq \nu_0.$$

Die reellen Zahlenfolgen $(\text{Re } z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, $(\text{Im } z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ erfüllen das Cauchysche Konvergenzkriterium, sind also konvergent. Wegen 2.1,(3) ist auch $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergent.

2.3 Rechenregeln für konvergente Folgen:

Seien $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}, (b_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$, $a = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu, b = \lim\limits_{\nu \to \infty} b_\nu$. Dann gilt:

1. $a_\nu \pm b_\nu \to a \pm b$,
2. $a_\nu \cdot b_\nu \to a \cdot b$,
3. $\frac{a_\nu}{b_\nu} \to \frac{a}{b}$, sofern $b_\nu \neq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, b \neq 0$,
4. $\overline{a_\nu} \to \bar{a}$,
5. $|a_\nu| \to |a|$.–

Beweis: Die Regeln (1),(2),(3) kann man wie die entsprechenden Regeln für konvergente reelle Zahlenfolgen beweisen oder aber auch mittels 2.1,(3) über das Reelle beweisen. Als Beispiel dafür beweisen wir (3):

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} = \frac{a_\nu \cdot \overline{b}_\nu}{|b_\nu|^2};$$

$$\begin{aligned}
\text{Re } \frac{a_\nu}{b_\nu} &= \frac{(\text{Re } a_\nu) \cdot (\text{Re } b_\nu) + (\text{Im } a_\nu) \cdot (\text{Im } b_\nu)}{(\text{Re } b_\nu)^2 + (\text{Im } b_\nu)^2} \\
&\to \frac{(\text{Re } a)(\text{Re } b) + (\text{Im } a)(\text{Im } b)}{(\text{Re } b)^2 + (\text{Im } b)^2} = \text{Re } \frac{a}{b}, \\
\text{Im } \frac{a_\nu}{b} &= \frac{-(\text{Re } a_\nu) \cdot (\text{Im } b_\nu) + (\text{Im } a_\nu) \cdot (\text{Re } b_\nu)}{(\text{Re } b_\nu)^2 + (\text{Im } b_\nu)^2} \\
&\to \frac{(\text{Re } a)(\text{Im } b) + (\text{Im } a)(\text{Re } b)}{(\text{Re } b)^2 + (\text{Im } b)^2} = \text{Im } \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

(4) und (5): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dann existiert $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_\nu - a| < \varepsilon \ \forall \nu \geq \nu_0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
|\overline{a}_\nu - \overline{a}| &= |\overline{a_\nu - a}| = |a_\nu - a| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0, \\
||a_\nu| - |a|| &\leq |a_\nu - a| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0.
\end{aligned}$$

Also: $\overline{a}_\nu \to \overline{a}$, $|a_\nu| \to |a|$.

Wir erinnern an den Begriff des Häufungspunktes:
Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$. z ist ein Häufungspunkt von $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ eine unendliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$ gibt mit:

$$|z_\nu - z| < \varepsilon \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

2.4 Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. z ist ein Häufungspunkt von $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$;
2. zu jeder Umgebung U von z gibt es eine unendliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$ mit $z_\nu \in U \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$;
3. es existiert eine Teilfolge $(z_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit z als Limes.–

Auch diese Aussage ist aus der Analysis-Vorlesung bekannt.

2.5 Satz: Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist abgeschlossen;
2. ist $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, so gehören alle Häufungspunkte von $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ zu A;
3. ist $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und konvergent, so ist $\lim_{\nu\to\infty} z_\nu \in A$.–

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und sei $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Ist dann U irgendeine Umgebung von z, so ergibt es ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $z_\nu \in U$. D.f. $U \cap A \neq \emptyset$. Also ist $z \in \overline{A} = A$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Limiten sind insbesondere auch Häufungspunkte.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $z \in \overline{A}$. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es ein $z_\nu \in A$ mit $|z_\nu - z| < \frac{1}{1+\nu}$.
Es folgt: $z_\nu \to z$, $z \in A$. Also ist $\overline{A} = A$.
Wir erinnern an den Begriff des Kompaktheit:
Sei $K \subset \mathbb{C}$. K heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

2.6 Satz: Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. K ist kompakt;
2. K ist abgeschlossen und beschränkt;

3. jede Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in K hat mindestens einen Häufungspunkt in K;

4. jede Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in K besitzt eine Teilfolge mit Limes in K.–

Beweis: "(1) $\iff$ (2)" ist der aus Analysis-Vorlesung bekannte Satz von Heine-Borel.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Wir nehmen an, daß $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in K besitzt. Dann gibt es zu jedem $z \in K$ einen Radius $r_z \in \mathbb{R}_+^*$ sowie einen Index ν_z, derart daß

$$z_\nu \notin D(z, r_z) \quad \forall \nu \geq \nu_z.$$

$\mathcal{U} := \{D(z, r_z) : z \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von K. $\mathcal{U}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung: $\exists \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n \in K$ mit $K \subset D(\tilde{z}_1, r_{\tilde{z}_1}) \cup \ldots \cup D(\tilde{z}_n, r_{\tilde{z}_n})$. Sei

$$\mu := \max\{\nu_{\tilde{z}_1}, \ldots, \nu_{\tilde{z}_n}\}.$$

Dann gilt: $z_\mu \notin D(\tilde{z}_1, r_{\tilde{z}_1}) \cup \ldots \cup D(\tilde{z}_n, r_{\tilde{z}_n})$, also $z_\mu \notin K$. Widerspruch! Also besitzt $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt in K.

(3) $\Rightarrow$ (4): vgl. 2.4

(4) $\Rightarrow$ (2): Wegen 2.5 ist K abgeschlossen. Wäre K nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in K mit $|z_\nu| \geq \nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Die Existenz dieser Folge besteht im Widerspruch zu (4). Also ist K auch beschränkt.

2.7 Satz: Sei $K_0 \supset K_1 \supset \ldots$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$. Dann ist

$$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} K_\nu \neq \emptyset.–$$

Beweis: Sei $z_\nu \in K_\nu$. Wegen $K_\nu \subset K_0$ besitzt die Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt z. Sei $\mu \in \mathbb{N}$. Dann ist $(z_\nu)_{\nu\geq\mu}$ eine Folge von K_μ. Wegen 2.5 ist $z \in K_\mu$. Also: $z \in \bigcap\limits_{\mu\in\mathbb{N}} K_\mu$.

2.8 Definition: Seien $A, M \subset \mathbb{C}$. A ist eine *relativ-kompakte* Teilmenge von M, wenn $\bar{A}$ kompakt ist und $\bar{A} \subset M$ gilt. Wir schreiben dann: $A \Subset M$.–

Es gilt: $A \Subset \mathbb{C} \Leftrightarrow A$ ist beschränkt.

Wir erinnern an die Definition des Zusammenhangs:

Sei $Z \subset \mathbb{C}$. Z heißt zusammenhängend, wenn gilt: Sind Z_1, Z_2 Z-offene Teilmengen von Z mit $Z = Z_1 \cup Z_2$ und $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, so ist stets $Z_1 = \emptyset$ oder $Z_2 = \emptyset$.

Für offene Teilmengen von $\mathbb{C}$, also Bereiche, fallen die Begriffe "zusammenhängend" und "wegzusammenhängend" zusammen.

Sei $A \subset \mathbb{C}$. Ein *Weg* in A ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a, b] \to A; a, b \in \mathbb{R}; a < b.$$

$\gamma(a)$ heißt der *Anfangs*- und $\gamma(b)$ der *Endpunkt* von γ.

2.9 Satz: Sei U ein Bereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. U ist zusammenhängend, also ein Gebiet;
2. $\forall z_1, z_2 \in U \quad \exists \,\text{Weg}\ \gamma : [a, b] \to U \quad \text{mit} \quad \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2;$
3. ist $\emptyset \neq A \subset U$ und ist A sowohl (U-)offen als auch U-abgeschlossen, so ist $A = U$.–

Beweis: "(1) $\iff$ (2)" ist eine bekannte Aussage aus der Analysis-Vorlesung: Eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $\emptyset \neq A \subset U$ sowohl U-offen als auch U-abgeschlossen. Dann ist $B := U \backslash A$ U-offen. Es gilt: $U = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Weil $A \neq \emptyset$ ist, muß $B = \emptyset$, also $A = U$ sein.

(3) $\Rightarrow$ (1): Seien U_1, U_2 U-offene Teilmengen von U mit $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Weil U_2 U-offen ist, muß U_1 auch U-abgeschlossen sein. Ist dann $U_1 \neq \emptyset$, so muß $U_1 = U$, also $U_2 = \emptyset$ sein.

Spezielle Wege sind Strecken. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Der Weg

$$[0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1 - t)z_1 + tz_2$$

heißt die *Strecke* von z_1 nach z_2. Wir schreiben dafür auch kurz $[z_1, z_2]$.

Sei $A \subset \mathbb{C}$. A heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in A$ die Strecke $[z_1, z_2]$ ein Weg in A ist. Konvexe Mengen sind spezielle wegzusammenhängende insbesondere zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$.

3 Funktionen

Gegenstand des Funktionentheorie sind gewisse Funktionen. Eine Funktion ist dabei eine Abbildung

$$f : M \to \mathbb{C},$$

wobei $M \subset \mathbb{C}$ ist. Ist $f(M) \subset N$, so schreiben wir auch

$$f : M \to N.$$

Wie üblich werden Funktionen häufig durch ihr Bildungsgesetz notiert. Dabei wird die komplexe Variable meistens mit z geschrieben, und die entsprechenden beiden reellen Variablen werden mit x, y bezeichnet, also $z = x + \mathrm{i}y$.

Wir behandeln einfache **Beispiele:**

3.1 Definition: Ein *Polynom* (in einer komplexen Veränderlichen) ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Bildungsgesetz

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad (a_\nu \in \mathbb{C}).$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt a_n der *Leitkoeffizient* und n der *Grad* von f. Der Grad wird mit $\operatorname{grad} f$ notiert.–

Mit Rücksicht auf den Polynombegriff in der Algebra wäre es besser von Polynomfunktion statt Polynom zu sprechen. Bekanntlich gilt: Ist $f \neq 0$ – nur für diesen Fall haben wir den Grad definiert! – so ist die Anzahl der Nullstellen von $f \leq \operatorname{grad} f$. Es ist ebenfalls bekannt, daß die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ des Polynom f i.w. eindeutig bestimmt sind. Ist $a_n = 1$, so heißt f *normiert.*

Polynome in einer komplexen Veränderlichen sind zu unterscheiden von solchen in zwei reellen Veränderlichen.

3.2 Definition: Ein *Polynom in zwei reellen Veränderlichen* ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Bildungsgesetz

$$f(z) = \sum_{\substack{0 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \nu \leq n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (a_{\mu\nu} \in \mathbb{C}).–$$

3.3 Satz: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Polynom in zwei reellen Veränderlichen, wenn sie eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{\substack{0 \leq \kappa \leq m \\ 0 \leq \lambda \leq n}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda \quad (b_{\kappa\lambda} \in \mathbb{C})$$

besitzt.–

Beweis: 3.2 $\Rightarrow$ 3.3: Setze $x = \frac{z-\overline{z}}{2}$, $y := \frac{z+\overline{z}}{2i}$.

3.3 $\Rightarrow$ 3.2: Setze $z = x + \mathrm{i}y$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Addition, Multiplikation und Division von Funktionen sind, wie üblich, definiert, ebenso die Komposition. Ist $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so ist

$$\bar{f} := \kappa \circ f, \text{ also } \bar{f}(z) := \overline{f(z)},$$

analog $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$.

3.4 Definition: Eine *rationale Funktion* (in einer komplexen Veränderlichen) ist eine Funktion f der Form $f = \frac{p}{q}$, wobei p, q Polynome (in einer komplexen Veränderlichen) und $q \neq 0$ ist.–
Die rationale Funktion f ist außerhalb der endlichen Nullstellenmenge von q definiert.
Wir erinnern an den Begriff der Stetigkeit:
Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in M$. f ist in z_0 stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in M \quad \text{mit} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Die folgende Aussage ist aus der Analysis-Vorlesung bekannt:

3.5 Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist stetig in z_0;
2. zu jeder Umgebung W von $f(z_0)$ gibt es eine Umgebung U von z_0 mit: $f(U \cap M) \subset W$;
3. $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind in z_0 stetig.
4. für jede Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in M mit $a_\nu \to z_0$ gilt:

$$f(a_\nu) \to f(z_0).–$$

Die folgenden Rechenregeln 3.6, 3.7 kann man wie im Reellen beweisen oder mit Hilfe von 3.5,(4) und gegebenfalls 2.3:

3.6 Rechenregeln für stetige Funktionen: Seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ Funktionen, die in $z_0 \in M$ stetig sind. Dann gilt:

1. $f \pm g$, $f \cdot g$ sind in z_0 stetig;
2. $\frac{f}{g}$ ist in z_0 stetig, sofern $g(z) \neq 0 \ \forall z \in M$;

3. $\bar{f}$, $|f|$ sind in z_0 stetig.–

3.7 Kettenregel für stetige Funktionen:

Seien $f : M \to N$, $g : N \to \mathbb{C}$ Funktionen. f sei in $x_0 \in M$ und g in $f(x_0) \in N$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in z_0 stetig.–

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $z \in M$ stetig ist.

Die folgende Aussage ist aus der Analysis-Vorlesung bekannt:

3.8 Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt: f ist stetig. $\Leftrightarrow$ Für jedem Bereich $U \subset \mathbb{C}$ ist $f^{-1}(U)$ relativ-offen in M.–

Polynome (3.1 und 3.2) sowie rationale Funktionen sind Beispiele stetiger Funktionen.

Ebenso sind die folgenden drei Aussagen aus der Analysis-Vorlesung bekannt; sie werden in dieser Vorlesung häufig benutzt werden:

3.9 Satz: Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

1. $f(K)$ ist kompakt;
2. $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f, |f|$ sind beschränkt und nehmen Maximum wie Minimum an.–

3.10 Satz: Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $f(z) \neq 0\ \forall z \in K$, so gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$|f(z)| \geq \delta \quad \forall z \in K.–$$

3.11 Satz: Sei $Z \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : Z \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(Z)$ zusammenhängend.–

Wir kehren zur Betrachtung der Stetigkeit in einem Punkt zurück.

Der Begriff der Stetigkeit hängt eng mit dem Limesbegriff zusammen. Auch dieser ist aus der Analysis-Vorlesung bekannt. Wir erinnern:

Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und sei z_0 ein Häufungspunkt von M. Dann ist $c \in \mathbb{C}$ der *Limes* von f für $z \to z_0$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit:

$$|f(z) - c| < \varepsilon \quad \forall z \in M, z \neq z_0, |z - z_0| < \delta.$$

Wir schreiben dann $c = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

Natürlich braucht ein solcher Limes nicht zu existieren. Existiert er, so ist er eindeutig bestimmt. Es ist zugelassen, daß $z_0 \in M$ und daß $z_0 \notin M$ ist.

Offensichtlich hängt der Limesbegriff mit der Stetigkeit zusammen.

3.12 Satz: Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt in z_0 den Limes c;
2. die Funktion $\tilde{f} : M \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in M \backslash \{z_0\} \\ c & , z = z_0 \end{cases}$$

   ist in z_0 stetig.–

Der Beweis von 3.12 ist offensichtlich.
Ist $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M, so gilt:

$$f \text{ ist in } z_0 \text{ stetig.} \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Mit Hilfe von 3.12 ergeben sich aus 3.6 und 3.7 Rechenregeln für Limiten, wie etwa

$$\lim_{z \to z_0} f \cdot g(z) = \left(\lim_{z \to z_0} f(z) \right) \cdot \left(\lim_{z \to z_0} g(z) \right).$$

Wir verzichten darauf, alle diese Regeln aufzulisten. Außerdem weisen wir darauf hin, daß 3.5 zusammen mit 3.12 Kriterien zur Limesberechnung liefert. Auch hier verzichten wir auf eine Auflistung.
Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, so ist auf eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ die reelle Differentialrechnung aus der Analysis-Vorlesung anwendbar. Wir erinnern:
Sei $z_0 \in U$. f ist in z_0 total-differenzierbar – wir sagen im weiteren $\mathbb{R}$-*differenzierbar* –, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

gibt mit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Natürlich kann man im Nenner des Quotienten die Betragsstriche (im vorliegenden Fall $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$!) fortlassen. L ist eindeutig bestimmt und heißt das Differential von f in z_0. Es wird mit $\mathrm{d}_{z_0} f$ notiert.

Ist f in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen von f in z_0. Sei $f_1 := \mathrm{Re}\, f, f_2 := \mathrm{Im}\, f$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0),\end{aligned}$$

und $\mathrm{d}_{z_0} f$ wird durch die Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

beschrieben. Wir notieren die Funktionalmatrix im weiteren mit $\mathrm{D}_{z_0} f$.

In der Analysis-Vorlesung wurde gezeigt:

3.13 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar;
2. es existieren in z_0 stetige Funktionen $\Delta, \Delta : U \to \mathbb{C}$ mit:

   $$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(x - x_0) + \Delta(z)(y - y_0) \quad \forall z \in U.$$

   In diesem Fall gilt $\Delta(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\Delta(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.–

Wir erinnern an den
Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Wir betrachten die Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z. \end{cases}$$

F ist eine in z_0 stetige Funktion mit $F(z_0) = 0$. Es gilt für alle $z \in U$:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + L(z - z_0) + F(z)(z - z_0) \\ &= f(z_0) \\ &+ (L(1) + \mathrm{Re}\, F(z) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, F(z))(x - x_0) \\ &+ (L(\mathrm{i}) - \mathrm{Im}\, F(z) + \mathrm{i}\, \mathrm{Re}\, F(z)(x - x_0) \end{aligned}$$

Dabei werden durch

$$\begin{aligned} \Delta_1(z) &= L(1) + \mathrm{Re}\, F(z) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, F(z) \\ \Delta_2(z) &= L(\mathrm{i}) - \mathrm{Im}\, F(z) + \mathrm{i}\, \mathrm{Re}\, F(z) \end{aligned}$$

in z_0 stetige Funktionen $U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$L(z) = \Delta_1(z_0)x + \Delta_2(z_0)y.$$

L ist eine $\mathbb{R}$ lineare Abbildung. Für $z \in U$, $z \neq z_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{|z - z_0|} \\
&\qquad = (\Delta_1(z) - \Delta_1(z_0))\frac{x - x_0}{|z - z_0|} + (\Delta_2(z) - \Delta_2(z_0))\frac{y - y_0}{|z - z_0|},
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

Mit Hilfe von 3.13 beweist man sehr leicht, die üblichen Rechenregeln der Differentialgleichung.

3.14 Rechenregeln:

Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f, g : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ $\mathbb{R}$-differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. $f \pm g$ sind in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f \pm g)}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \pm \frac{\partial g}{\partial x}(z_0), \\
\frac{\partial (f \pm g)}{\partial y}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \pm \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \text{ \textit{(Summenregeln)}.}
\end{aligned}$$

2. f, g ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(z_0), \\
\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial y}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \text{ \textit{(Produktregeln)}.}
\end{aligned}$$

3. Sei $g(z) \neq 0 \ \forall z \in U$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f/g}{\partial x}(z_0) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)g(z_0) - f(z_0)\frac{\partial g}{\partial x}(z_0)}{g(z_0)^2}, \\
\frac{\partial f/g}{\partial y}(z_0) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)g(z_0) - f(z_0)\frac{\partial g}{\partial y}(z_0)}{g(z_0)^2} \text{ \textit{(Quotientenregeln)}.–}
\end{aligned}$$

3.15 Kettenregel:
Seien die Bereiche $U, V \subset \mathbb{C}, f : U \to V, g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen. Sei f in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und g in $w_0 := f(z_0)$. Dann ist $g \circ f$ in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und

$$\mathrm{D}_{z_0} g \circ f = (\mathrm{D}_{w_0} g) \cdot (\mathrm{D}_{z_0} f).-$$

3.16 Satz: Seien die Bereiche $U, V \subset \mathbb{C}, f : U \to V$ eine bijektive Funktion, sei $z_0 \in U$. Es gelte:

1. $f^{-1} : V \to U$ ist in $w_0 := f(z_0)$ stetig,
2. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar,
3. $\mathrm{D}_{z_0} f$ ist invertierbar.

Dann ist f^{-1} in w_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und

$$\mathrm{D}_{w_0} f^{-1} = (\mathrm{D}_{z_0} f)^{-1}.-$$

Beweis: Es existieren in z_0 stetige Funktionen $\Delta_,\Delta_1 : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0)L + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$$

Sei $\Delta := (\Delta_1, \Delta_2)$. Es ist

$$\Delta : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

eine in z_0 stetige Abbildung. Nun ist $\det D_{z_0} f \neq 0$. D.f.: $\det \Delta(z) \neq 0$ für alle z einer offenen Umgebung $\tilde{U}$ von z_0 in U. Sei $\tilde{V}$ eine offene Umgebung von w_0 in V mit $f^{-1}(\tilde{V} \subset \tilde{V}$. Wir notieren die Punkte von V mit w; sei $\mu = \mathrm{Re}\, w$, $v = \mathrm{Im}\, w$. Sei $w \in \tilde{V}$, $z := f^{-1}(w)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w - w_0 &= f(z) - f(z_0) = \Delta(z)\tbinom{x-x_0}{y-y_0}, \\ z - z_0 &= \tbinom{x-x_0}{y-y_0} = (\Delta(z))^{-1}\tbinom{u-u_0}{v-v_0}; \\ f^{-1}(w) &= f^{-1}(w_0) + (\Delta f^{-1}(w))^{-1} \cdot \tbinom{u-u_0}{v-v_0} \end{aligned}$$

Dabei notiere man komplexe Zahlen als reelle Spaltenvektoren mit zwei Komponenten.
Weil die $\mathbb{R}$-Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt, daß f^{-1} in w_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar ist und daß gilt:

$$D_{w_0} f^{-1} = (\Delta(f^{-1}(w_0))^{-1} = (D_{z_0} f)^{-1}.$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, eine Bereich $U \subset \mathbb{C}$, heißt $\mathbb{R}$-differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $z \in U$ $\mathbb{R}$-differenzierbar ist.

Wir erinnern an den Begriff der C^q-Abbildung aus der Analysis-Vorlesung, ohne darauf näher einzugehen. Dabei ist $q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \to N$ eine Funktion. f heißt eine *topologische Abbildung* oder ein *Homöomorphismus*, wenn gilt:

1. f ist bijektiv,
2. f, f^{-1} sind stetig.

Dabei kann 2 ersetzt werden durch

- f ist stetig und M-N-offen, d.h. für jede M-offene Menge $A \subset M$ ist $f(A)$ N-offen.

Der Begriff der Homöomorphie wird ebenfalls in der Analysis-Vorlesung behandelt.

Seien die Bereiche $U, V \subset \mathbb{C}$ und sei $f : U \to V$ eine Funktion. f heißt ein $\mathbb{R}$-Diffeomorphismus bzw. C^q-Diffeomorphismus, wenn gilt:

1. f ist bijektiv,
2. f, f^{-1} sind $\mathbb{R}$-differenzierbar bzw. C^q-Abbildungen.

In der Analysis-Vorlesung zeigt man:

3.17 Satz: Satz über reguläre Abbildungen: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung. Es gelte: $\mathrm{D}_z f$ ist für jedes $z \in U$ invertierbar (Regularitätsbedingung). Dann folgt:

1. f ist offen, d.h. $\forall$ Bereich $\tilde{U} \subset U$ ist Bereich $f(\tilde{U}) \subset \mathbb{C}$;
2. f ist ein lokaler C^1-Diffeomorphismus, d.h. $\forall z_0 \in U$ $\exists$ offene Umgebung $\tilde{U}$ von z_0 in U mit:
$$f|\tilde{U} : \tilde{U} \to f(\tilde{U})$$
ist ein C^1-Diffeomorphismus.–

Wie verlängern unsere Liste von Funktionen in Komplexen.

3.18 Definition: Die Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \exp z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$$

heißt *Exponentialfunktion*. Wir schreiben auch e^z statt $\exp z$.–
exp setzt die reelle Exponentialfunktion in Komplexen fort.

3.19

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t \ \forall t \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ z = \mathrm{Re}\ w$ und $\mathrm{Im}\ z = \mathrm{Im}\ w \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi$.
3. $\mathrm{e}^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. exp ist $\mathbb{R}$-differenzierbar und

$$\mathrm{D}_z \exp = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix} u$$

ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ invertierbar.–

Beweis: (1) ist klar.
(3): $|e^z| = e^x \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
(2): Sei $z = x + \mathrm{i}\ y$ $w = u + \mathrm{i}\ v$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
"$\Rightarrow$": Es gilt $|e^z| = |e^w|$, $e^x = e^u$, $x = u$;
$\cos y + \mathrm{i}\ \sin y = \cos v + \mathrm{i}\ \sin v$; $y - v \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi$.
"$\Leftarrow$": klar.
(4) exp ist stetig partiell differenzierbar $\mathbb{R}$-differenzierbar.

$$\begin{aligned} D_z \exp &= \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \\ \det D_z \exp &= e^{2x} \neq 0. \end{aligned}$$

3.19, (2) kann auch so formuliert werden:

3.20 $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi\mathrm{i}$.-
Aus 3.19 und 3.17 folgt:

3.21 Satz und Definition: Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\exp\big(\mathbb{R} \times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\big) = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$$

und

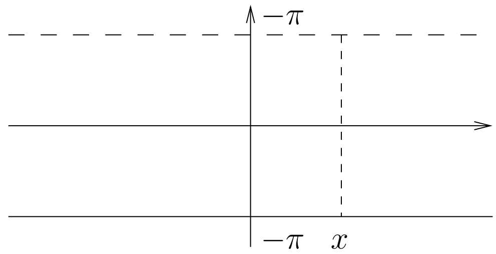
$$\exp |\mathbb{R} \times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[: \mathbb{R} \times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\to \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$$

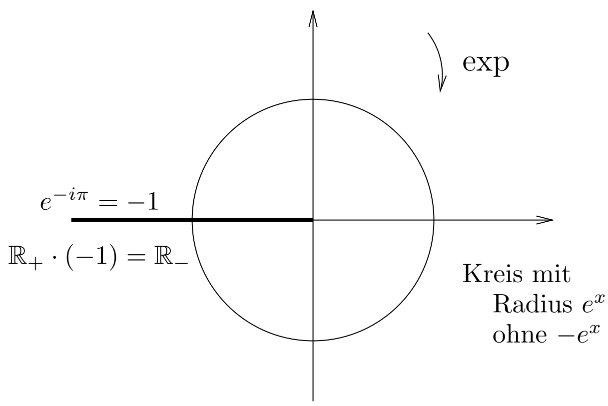
ist ein C^1-Diffeomorphismus. Die Umkehrfunktion

$$\log_{\varphi_0} := \left(\exp|\mathbb{R}\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\right)^{-1}$$

heißt *Logarithmusfunktion* zu φ_0. Für $\varphi_0 = -\pi$ heißt $\log := \log_{-\pi}$ *Hauptzweig* der Logarithmusfunktion. $\log_{\varphi_0}$ ist $\mathbb{R}$-differenzierbar. –

Beweis: Bildchen zum Fall $\varphi = -r$





Es ist

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbb{R}\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[&= \{e^x(\cos y + \mathrm{i}\ y) : x \in \mathbb{R}, y \in]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\\
&= \{r(\cos y + \mathrm{i}\ y) : r \in \mathbb{R}_+^*, y \in]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[\\
&= \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot (\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\ \sin\varphi_0) \\
&= \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ e^{\mathrm{i}\,\varphi_0}.
\end{aligned}$$

$$\exp \mid \mathbb{R}\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[:\ \mathbb{R}\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi \to \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ e^{\mathrm{i}\,\varphi_0}$$

ist surjektiv, wie wir gerade gezeigt haben, und injektiv wegen 3.19,(2), also bijektiv. Außerdem ist die Abbildung stetig sowie offen wegen 3.19,(4) und 3.17. Aus 3.17 folgt ferner, daß die Abbildung ein C^1-Diffeomorphismus ist.

3.22 Definition: Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann sei

$$\arg_{\varphi_0} : \mathbb{C}^* \to [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$$

wie folgt definiert: Für $z \in \mathbb{C}^*$ sei $\arg_{\varphi_0}(z)$ die gemäß 1.16 eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$ mit

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

$\arg_{\varphi_0}$ heißt *Argument-* oder *Arcusfunktion* zu φ_0.–

3.23 Satz: Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\log_{\varphi_0} z = \log|z| + \mathrm{i}\arg_{\varphi_0} z \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}.$$

Insbesondere ist $\arg_{\varphi_0}$ eine C^1-Funktion auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$.–

Beweis: Sei $w := \log_{\varphi_0} z$, $w = u + \mathrm{i}\ v$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$;
$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\ \sin\varphi)$, $\varphi \in]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$.
Dann gilt: $e^w = e^u(\cos v + \mathrm{i}\ \sin v) = z$;
$e^u = |z|',\ u = \log|z|$;
$v = \varphi = arg_{\varphi_0} z$.

Als Umkehrabbildung eines C^1 Diffeomorphismus ist $\log_{\varphi_0}$ eine C^1-Abbildung. Deshalb ist $arg_{\varphi_0} = \mathrm{Im}\ \log_{\varphi_0}$ eine C^1-Funktion (, sogar eine C^∞- Funktion).

Kapitel 2

Komplexe Differentialrechnung, Holomorphie

4 Der komplexe Ableitungsbegriff

`In diesem Paragraphen sei zunächst` $M \subset \mathbb{C}$`, und` $z_0 \in M$ `sei ein Häufungspunkt von` M`.`

4.1 Definition: Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt in z_0 $\mathbb{C}$-*differenzierbar*, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Limes die *Ableitung* von f in z_0; er wird mit $f'(z_0)$ oder auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$ notiert.–

4.2 Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f ist genau dann in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar, wenn es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

In diesem Fall ist $L(1) = f'(z_0)$.–

4.3 Satz: Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar.

2. Es existiert eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : M \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$$

In diesem Fall $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.–

4.4 Rechenregeln: Seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1. $f \pm g$ sind in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar, und es ist

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0) \quad (\textit{Summenregel}).$$

2. $f \cdot g$ ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar, und es ist

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0) \quad (\textit{Produktregel}).$$

3. Sei $g(z) \neq 0 \ \forall z \in M$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar, und es ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad (\textit{Quotientenregel}).$$

4.5 Kettenregel: Sei auch $N \subset \mathbb{C}$, und sei $w_0 \in N$ ein Häufungspunkt von N. Sind $f : M \to N$, $g : N \to \mathbb{C}$ in z_0 bzw. w_0 $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktionen, und ist $w_0 = f(z_0)$, so ist $g \circ f$ in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar und

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0).–$$

4.6 Satz: Sei auch $N \subset \mathbb{C}$, und sei $w_0 \in N$ ein Häufungspunkt von N. Sei $f : M \to N$ eine bijektive Funktion mit $w_0 = f(z_0)$, für die gilt:

1. $f^{-1} : N \to M$ ist in w_0 stetig,
2. f ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar,
3. $f'(z_0) \neq 0$.

Dann ist f^{-1} in w_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar und

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.–$$

`Von nun ab sei in diesem Paragraphen` $M = U \subset \mathbb{C}$ `ein Bereich.`

4.7 Ist die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ $\mathbb{C}$-differenzierbar, so ist sie dort auch $\mathbb{R}$-differenzierbar.–

4.8 Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei in $z_0 \in U$ $\mathbb{C}$-differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{i} f'(z_0).–$$

4.9 Sei $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, und sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die zugehörige Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. L in $\mathbb{C}$-linear,
2. $L(\mathrm{i}) = \mathrm{i}L(1)$,
3. $b + \mathrm{i}d = \mathrm{i}(a + \mathrm{i}c)$,
4. $a = d, c = -b$.–

4.10 Satz: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$, sei $f_1 := \mathrm{Re}\, f; f_2 := \mathrm{Im}\, f$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar.
2. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$
3. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und
$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{aligned}$$
*(*CAUCHY-RIEMANN*sche Differentialgleichungen).*–

4.11 Definition: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *holomorph*, wenn f in jedem Punkt $z \in U$ $\mathbb{C}$-differenzierbar ist.
Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt die Funktion $f' : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$, wie üblich die *Ableitung* von f.–

4.12 Bezeichnungen: Mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$.–

`Beispiele:`

4.13 Konstante Funktionen, sowie $f(z) = z$ sind holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Wegen 4.4 sind darum alle Polynome (in einer komplexen Veränderlichen) holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Die Ableitung berechnet sich wie bei reellen Polynomen.–

4.14 Rationale Funktionen (in einer komplexen Veränderlichen) sind (auf ihrem Definitionsbereich) holomorph. Die Ableitung berechnet sich wie im reellen Fall.–

Doch Vorsicht! Polynomen.–

4.15 Die Konjugation, also $f(z) = \bar{z}$, ist in *keinem* Punkt von $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-differenzierbar.–

4.16 exp ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Wie im Reellen ist $\exp' = \exp$.–

4.17 Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}, U_0 := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$. $\log_{\varphi_0}$ ist eine holomorphe Funktion auf U_0. Es gilt:

$$(\log_{\varphi_0})'(z) = \frac{1}{z}.–$$

4.18 Satz: Aus 4.4 folgt: $\mathcal{O}(U)$ ist ein Ring. Er umfaßt die Polynome, insbesondere den Körper $\mathbb{C}$ der konstanten Funktionen. Darum ist $\mathcal{O}(U)$ auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.–

4.19 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt: f ist konstant $\Leftrightarrow f' = 0$, also gleich der Nullfunktion.–

5 Der Wirtinger-Kalkül

5.1 Satz und Definition: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $z_0 \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar.
2. Es existieren in z_0 stetige Funktionen $A_1, A_2 : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + A_1(z)(z - z_0) + A_2(z)(\bar{z} - \overline{z_0}).$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} A_1(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right), \\ A_2(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right). \end{aligned}$$

Die Zahlen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &:= A_1(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) &:= A_2(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \end{aligned}$$

heißen die WIRTINGER-*Ableitungen* von f in z_0.–

5.2 Satz: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $z_0 \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar.
2. f ist in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

In diesem Fall ist $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.–

5.3 Bezeichnungen: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei $z_0 \in U$. Dann kürzt man ab:

$$\begin{aligned} f_x(z_0) &:= \tfrac{\partial f}{\partial x}(z_0), \quad f_y(z_0) := \tfrac{\partial f}{\partial y}(z_0); \\ f_z(z_0) &:= \tfrac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad f_{\bar{z}}(z_0) := \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0). – \end{aligned}$$

Ein **Beispiel:**

5.4 Für $f(z) = \bar{z}$ gilt:

$$\tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1, \quad \tfrac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\text{kurz } \tfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1, \quad \tfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0. –$$

5.5 Rechenregeln: Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ $\mathbb{R}$-differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

1.
$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\pm g)}{\partial z}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\pm\frac{\partial g}{\partial z}(z_0),\\ \frac{\partial(f\pm g)}{\partial \bar z}(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\pm\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z_0); \quad \textit{(Summenregeln)}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot g(z_0)+f(z_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial z}(z_0),\\ \frac{\partial(f\cdot g)}{\partial \bar z} &= \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot g(z_0)+f(z_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0); \quad \textit{(Produktregeln)}\end{aligned}$$

3. Sei $g \neq 0\ \forall z \in U$. Dann ist
$$\begin{aligned}\frac{\partial f/g}{\partial z}(z_0) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot g(z_0)-f(z_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)}{g(z_0)^2},\\ \frac{\partial f/g}{\partial \bar z}(z_0) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot g(z_0)-f(z_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z_0)}{g(z_0)^2}. \quad \textit{(Quotientenregeln)}. -\end{aligned}$$

5.6 Kettenregeln: Sei auch $V \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und seien $f: U \to V, g: V \to \mathbb{C}$ Funktionen. Sei f in $z_0 \in U$ $\mathbb{R}$-differenzierbar und g in $w_0 = f(z_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\circ f}{\partial z}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial w}(w_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)+\frac{\partial g}{\partial \bar w}(w_0)\cdot\frac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0),\\ \frac{\partial g\circ f}{\partial \bar z}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial w}(w_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)+\frac{\partial g}{\partial \bar w}(w_0)\cdot\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0).\end{aligned}$$

Dabei wurde die komplexe Variable für g mit w notiert.–

5.7 Rechenregeln: Die Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ sei im Punkt $z_0 \in U$ $\mathbb{R}$-differenzierbar. Dann ist auch $\bar f$ in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar (natürlich!) und es gilt:
$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)} = \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0),\ \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)} = \frac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0).–$$

Die Wirtinger-Ableitungen sind partielle Ableitungen im folgenden Sinne:

5.8 Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom in zwei reellen Veränderlichen, sei

$$f(z) = \sum_{\substack{0 \le \kappa \le m \\ 0 \le \lambda \le n}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \bar{z}^\lambda.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \sum_{\substack{1 \le \kappa \le m \\ 0 \le \lambda \le n}} \kappa b_{\kappa\lambda} z^{\kappa-1} \bar{z}^\lambda, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \sum_{\substack{0 \le \kappa \le m \\ 1 \le \lambda \le n}} \lambda b_{\kappa\lambda} z^\kappa \bar{z}^{\lambda-1}. - \end{aligned}$$

5.9 Bemerkung und Definition: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine überall $\mathbb{R}$-differenzierbare Funktion. f heißt *antiholomorph*, wenn f die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. $\frac{\partial f}{\partial z}$ ist die Nullfunktion,
2. $\bar{f}$ ist holomorph.

5.10 Satz: Sei auch $V \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und seien $f : U \to V, g : V \to \mathbb{C}$ Funktionen. Dann gilt:

1. Sind f und g beide holomorph oder antiholomorph, so ist $g \circ f$ holomorph.
2. Ist eine der beiden Funktionen f, g holomorph und die andere antiholomorph, so ist $g \circ f$ antiholomorph.–

Gemäß 5.7 ist die Konjugation antiholomorph. Dann folgt aus 5.10 der folgende *Spiegelungssatz*:

5.11 Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und sei

$$\tilde{U} := \{\bar{z} : z \in U\}.$$

Dann ist die Funktion

$$g : \tilde{U} \to \mathbb{C}, g(z) := \overline{f(\bar{z})},$$

holomorph.–

Kapitel 3

Komplexe Integralrechnung, Formeln von Cauchy

6 Komplexe Integrale auf reellen Intervallen

In diesem Paragraphen sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, d.h. I ist ein Intervall mit mehr als einem Punkt.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann besitzen $f_1 := \mathrm{Re}\, f$ und $f_2 := \mathrm{Im}\, f$ Stammfunktionen F_1, F_2. Für $F := F_1 + \mathrm{i}F_2$ gilt: $F' = F_1' + \mathrm{i}F_2' = f$. F heißt eine *Stammfunktion* von f. Jede Stammfunkton von f ist von diesem Typ. Aus einer Stammfunktion F erhält man alle Stammfunktionen in der Form $F + c$, $c \in \mathbb{C}$.

6.1 Definition und Bemerkung: Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und sei F Stammfunktion von f. Für $a, b \in I$ heißt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := [F]_a^b := F(b) - F(a)$$

das *Integral* von f in den Grenzen a und b. Das Integral ist wohldefiniert, und es gilt:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\ \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\ \mathrm{d}t.-$$

6.2 Rechenregeln: Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ stetig; $a, b, c \in I$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

1. $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$,

2. $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$,

3. $\overline{\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} = \int\limits_a^b \bar{f}(t)\,\mathrm{d}t$,

4. $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int\limits_a^b g(t)\mathrm{d}t$.–

6.3 Satz: Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, seien $a, b \in I$. Dann gilt:

1. $\left|\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, falls $a \leq b$;

2. $\left|\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int\limits_a^b |f(t)|\mathrm{d}t\right|$, allgemein.–

6.4 Produktregel: Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ *stetig differenzierbar*, d.h. $\mathbb{C}$-differenzierbar mit stetigen Ableitungen, seien $a, b \in I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.–$$

6.5 Substitutionsregel: Sei $g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sei f eine stetige Funktion auf dem (echten) Intervall $g(I)$. Dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,\mathrm{d}s.–$$

Mit Hilfe von 6.3 beweist man wie im Reellen!

6.6 Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf I, welche lokal gleichmäßig, d.h. auf jeder kompakten Teilmenge von I gleichmäßig, gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.–$$

6.7 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : I \times U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t, \cdot)\,\mathrm{d}t : U \to \mathbb{C}$$

ist stetig.–

6.8 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : I \times U \to \mathbb{C}$ stetig. Darüberhinaus gelte:

1. $\forall t \in I$ ist
$$f(t, \cdot) : U \to \mathbb{C}$$
holomorph,

2. die Funktion
$$\frac{\partial f}{\partial z} : I \times U \to \mathbb{C},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) := \big(f(t, \cdot)\big)'(z),$$
ist stetig.

   Dann folgt für $a, b \in I$:
$$\int_a^b f(t, \cdot)\,\mathrm{d}t : U \to \mathbb{C}$$
ist holomorph und
$$\left(\int_a^b f(t, \cdot)\,\mathrm{d}t\right)'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)\,\mathrm{d}t.–$$

7 Integrationswege, Wegintegrale

Wir erinnern an den Begriff des Weges aus 2. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{R}, a < b$, ein Weg. Dann heißt $\operatorname{Sp}\gamma := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ. γ heißt stetig differenzierbar, wenn es die Funktion γ ist.

7.1 Definition: Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt ein *Integrationsweg*, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt mit:

$$\gamma|[t_{k-1}, t_k]$$

ist stetig differenzierbar, $k = 1, \ldots, n$.–

7.2 Definition und Satz: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Dann heißt das Supremum der Summen

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

über alle Zerlegungen von $[a, b]$ die *Länge* von γ. Sie wird mit $L(\gamma)$ notiert. Es ist $L(\gamma) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine Zerlegung wie in 7.1, so gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Insbesondere ist dann $L(\gamma)$ endlich.–

7.3 Beispiele: Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Dann ist die Verbindungsstrecke $[z_0, z_1] : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$, ein stetig differenzierbarer Weg. Es ist

$$L([z_0, z_1]) = |z_1 - z_0|.–$$

7.4 Streckenzug: Seien $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann heißt

$$\gamma : [0, n] \to \mathbb{C},$$

$$\gamma(t) := z_k + (t - k)(z_{k+1} - z_k); t \in [k, k + 1]; k = 0, \ldots, n - 1;$$

der durch $z_0, \ldots, z_n$ definierte *Streckenzug*. γ wird mit $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ notiert. Es ist ein Integrationsweg, und es gilt:

$$L([z_0, \ldots, z_n]) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|.–$$

Im Fall $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ ist der Streckenzug eine *Dreieckslinie*.

7.5 Kreislinie: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

heißt die positiv orientierte *Kreislinie* mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r. γ wird mit $\kappa(z_0, r)$ notiert. Es ist ein Integrationsweg, und es gilt: $L\big(\kappa(z_0, r)\big) = 2\pi r$.–

7.6 Definition und Bemerkung: Seien

$$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$$

Wege. γ_2 heißt mit γ_1 *kombinierbar*, wenn $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ ist. In diesem Fall sei

$$\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a, b + (d-c)] \to \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & , a \le t \le b \\ \gamma_2(t - b + c) & , b \le t \le b + (d-c) \end{cases}$$

$\gamma_1 \vee \gamma_2$ heißt der *zusammengesetzte Weg.*
Sind γ_1, γ_2 Integrationswege, so auch $\gamma_1 \vee \gamma_2$. Dann ist $L(\gamma_1 \vee \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.–
Die Formel $L(\gamma_1 \vee \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ gilt auch für beliebige Wege; wir gehen nicht darauf ein.
Im Fall der Kombinierbarkeit kann sofort auch $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_n$ für $n > 2$ definiert werden.

7.7 Seien $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n] = [z_0, z_1] \vee [z_1, z_2] \vee \ldots \vee [z_{n-1}, z_n].–$$

7.8 Definition und Bemerkung: Sei

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

ein Weg. Dann heißt

$$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$(-\gamma)(t) := \gamma(a + b - t),$$

(zu γ) *entgegengesetzter Weg.*
Offensichtlich ist $L(-\gamma) = L(\gamma)$. Ist γ ein Integrationsweg, so auch $-\gamma$.–

7.9 Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und sei $f : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sei

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &:= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dabei sei $t_0, t_1, \ldots, t_n$ eine Zerlegung von $[a,b]$ wie in 7.1. $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ heißt das *Wegintegral* über f längs γ.–

7.10 Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist

$$\int\limits_{\kappa(z_0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi\mathrm{i}.-$$

7.11 Rechenregel: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, seien $f, g : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\int\limits_\gamma (\alpha f + \beta g)(z_0)\,\mathrm{d}z = \alpha \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \beta \int\limits_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.-$$

Regel 6.2 (3) ist nicht übertragbar; bei den Regeln 6.2 (1), (2), deren Analogie bei den Wegintegralen Integral über $\gamma_1 \vee \gamma_2$ bzw. $-\gamma$ betreffen, benötigen wir sogenannte Parametertransformationen.

7.12 Definition: Seien I, J kompakte (echte) Intervalle in $\mathbb{R}$ und sei $\varphi : J \to I$. φ heißt *Parametertransformation*, wenn gilt:

1. φ ist bijektiv,
2. φ ist stetig differenzierbar.

(Aus der Analysis-Vorlesung weiß man dann, daß φ ein Homöomorphismus und streng monoton ist.)
φ heißt *positiv* oder *orientierungstreu*, wenn

$$\varphi'(t) \geq 0 \quad t \in J.$$

φ heißt *negativ* oder *orientierungsumkehrend*, wenn

$$\varphi'(t) \leq 0 \quad t \in J.-$$

7.13 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation. Dann ist $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$.–
Man zeigt übrigens sehr leicht viel mehr:
Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ein Homöomorphismus, so ist

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi).$$

7.14 Transformationsformel: Seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $f : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation. Dann gilt:

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} = \begin{cases} \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z & \text{, falls } \varphi \text{ positiv ist,} \\ -\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z & \text{, falls } \varphi \text{ negativ ist} \end{cases} .-$$

Die *Transformationsformel* gestattet große Freiheit bei den Parametrisierungen. Darum wird häufig statt γ nur $\operatorname{Sp}\gamma$ und die Durchlaufrichtung von γ angegeben.

7.15 Seien $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ Integrationswege. γ_2 sei mit γ_1 kombinierbar. Sei $f : \operatorname{Sp}\gamma_1 \cup \operatorname{Sp}\gamma_2 \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$\int\limits_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.-$$

Natürlich kann 7.15 sofort auch auf zusammengesetzte Integrationswege $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_n$ erweitert werden. 7.15 gestattet eine Zerlegungstechnik für Integrale.

7.16 Beispiele: Seien $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und sei

$$f : \bigcup_{k=0}^{n-1} \operatorname{Sp}[z_k, z_{k+1}] \to \mathbb{C}$$

stetig. Dann ist

$$\int\limits_{[z_0,\ldots,z_n]} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)\,\mathrm{d}z.-$$

7.17 Sei $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*, t_0 \in \mathbb{R}$ und sei

$$f : \partial D(z_0, r) \to \mathbb{C}$$

stetig. Dann ist für $\gamma : [t_0, t_0 + 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) := z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.-$$

Wegen 7.17 notiert man $\int\limits_{\kappa(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ häufig auch als $\oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z$ oder $\oint\limits_{\partial D(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$.

7.18 Satz: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und sei $f : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.–$$

7.19 Satz: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und sei $f : \operatorname{Sp}\gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le L(\gamma) \cdot \sup_{\operatorname{Sp}\gamma} |f(z)|.–$$

7.20 Satz: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $\operatorname{Sp}\gamma$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f_n(z)\,\mathrm{d}z \to \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.–$$

Man beachte, daß $\operatorname{Sp}\gamma$ kompakt ist. Deshalb sind die Voraussetzungen in 7.20 nur scheinbar schärfer als in 6.6.

7.21 Satz: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : \operatorname{Sp}\gamma \times U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z : U \to \mathbb{C}, \left(\int_{\gamma} f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z\right)(w) := \int_{\gamma} f(z,w)\,\mathrm{d}z$$

stetig.–

7.22 Satz: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : \operatorname{Sp}\gamma \times U \to \mathbb{C}$ stetig. Darüberhinaus gelte:

1. $\forall z \in \operatorname{Sp}\gamma$ ist
$$f(z,\cdot) : U \to \mathbb{C} \quad \text{holomorph,}$$
2. die Funktion
$$\frac{\partial f}{\partial w} : \operatorname{Sp}\gamma \times U \to \mathbb{C},$$
$$\frac{\partial f}{\partial w}(z,w) := \big(f(z,\cdot)\big)'(w),$$

ist stetig. Dann folgt:

$$\int_\gamma f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z : U \to \mathbb{C}$$

ist holomorph und

$$\left(\int_\gamma f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z\right)'(w) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,\mathrm{d}z.\text{–}$$

8 Komplexe Stammfunktionentheorie, Satz von Goursat

Im folgenden bezeichne $C(G)$ die Menge der *stetigen Funktionen* auf G. Ferner sei in diesem Paragraphen $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

8.1 Definition und Satz: Sei $f \in C(G)$. Die Funktion $F \in \mathcal{O}(G)$ heißt eine *Stammfunktion* von f, wenn $F' = f$ ist. Existiert zu f eine Stammfunktion, so heißt f (auf G) *integrabel*. Ist f integrabel und ist F eine Stammfunktion von f, so erhält man alle Stammfunktionen von F in der Form $F + c, c \in \mathbb{C}$. Ist dann $\gamma : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := [F]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} := F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).\text{–}$$

8.2 Beispiele:

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$	$\mathbb{C}$	$\sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{a}{\nu+1} a_\nu z^{\nu+1}$
$\frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2)$	$\mathbb{C}^*$	$\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{z^{n-1}}$
$\frac{1}{z}$	$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\ (\varphi_0 \in \mathbb{R})$	$\log_{\varphi_0}$
$\exp$	$\mathbb{C}$	$\exp$

8.3 Definition: Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.–

8.4 Satz: Sei $f \in C(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist integrabel, d.h. f besitzt eine Stammfunktion.
2. Seien z_0, z_1 irgendwelche Punkte aus G. Ist dann γ irgendein Integrationsweg in G mit z_0 als Anfangs- und z_1 als Endpunkt, so liefert $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ stets denselben, nur von z_0, z_1 abhängigen, Wert.
3. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.–

Achtung:
Es ist $\int_{\kappa(0,1)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$ (vgl. 7.10). Darum ist $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$ *nicht integrabel.*–
Ist G konvex, so existiert eine schärfere Variante von 8.4:

8.5 Satz: Sei G konvex, $f \in C(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist integrabel, d.h. f besitzt eine Stammfunktion.
2. Sind z_0, z_1, z_2 irgendwelche Punkte aus G, so ist

$$\int_{[z_0,z_1,z_2,z_0]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.–$$

8.6 Satz von Goursat: Seien $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und sei U eine offene Umgebung von $\Delta(z_0, z_1, z_2)$. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_{[z_0,z_1,z_2,z_0]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.–$$

8.7 Satz von Cauchy-Goursat: Sei G konvex und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt:

1. f ist integrabel, d.h. f besitzt eine Stammfunktion.
2. Seien z_0, z_1 irgendwelche Punkte aus G. Ist dann γ irgendein Integrationsweg aus G mit z_0 als Anfangs- und z_1 als Endpunkt, so liefert $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ stets denselben, nur von z_0, z_1 abhängigen Wert. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.–

8.8 Definition: G heißt ein CAUCHY-*Gebiet*, wenn für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ die wegen 8.4 äquivalenten Aussagen von 8.7 gelten.–

8.7 können wir dann auch so formulieren: Konvexe Gebiete sind CAUCHY-Gebiete.

Aber etwa $\mathbb{C}^*$ ist kein CAUCHY-Gebiet!

Wir verallgemeinern den Satz von GOURSAT (8.6) ein wenig:

8.9 Satz: Seien $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und sie U eine offene Umgebung von $\Delta(z_0, z_1, z_2)$. Ist $w_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche auf $U \backslash \{w_0\}$ holomorph ist. Dann gilt ebenfalls

$$\int\limits_{[z_0,z_1,z_2,z_0]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.–$$

Aus 8.9 und 8.5 folgt:

8.10 Satz: Sei G konvex und $w_0 \in G$. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche auf $G \backslash \{w_0\}$ holomorph ist. Dann ist f auf G integrabel.–

Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, so besitzt jeder Punkt $z \in U$ eine konvexe Umgebung $\tilde{U} \propto U$. Dann folgt mit 8.7:

8.11 Definition und Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f \in C(U)$. f heißt *lokal-integrabel*, wenn jeder Punkt $z \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \propto U$ besitzt, auf der f integrabel ist. Ist $f \in \mathcal{O}(U)$, so ist f lokal-integrabel.–

Aus 8.9 bzw. 8.10 folgt:

8.12 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f \in C(U)$. Gibt es eine Teilmenge N von U ohne Häufungspunkte in U, derart daß $f|U \backslash N$ holomorph ist, so ist f auf U lokal integrabel.–

9 Die Cauchysche Integralformel

9.1 Cauchysche Integralformel: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*, U$ eine offene Umgebung von $\bar{D}(z_0, r)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \quad \forall z \in D_0 := D(z_0, r).–$$

$\oint\limits_{\partial D_0}$ bedeutet $\int\limits_{\kappa(z_0,r)}$.

Ergänzung zu 9.1 f ist auf $D(z_0, r)$ ∞-oft $\mathbb{C}$-differenzierbar, d.h. $f', f'', \dots$ existieren auf $D(z_0, r)$, und für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, z \in D(z_0, r)$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{partialD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta. -$$

Aus der Ergänzung von 9.1 folgt:

9.2 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist f ∞-oft $\mathbb{C}$-differenzierbar. Alle Ableitungen von f sind holomorph.–

Aus 8.11 und 9.2 folgt:

9.3 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $f \in C(U)$. Dann gilt: f ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist lokal integrabel.–

Aus 9.3 und 8.12 folgt:

9.4 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f \in C(U)$. Gibt es eine Teilmenge N von U ohne Häufungspunkte in U, derart daß $f|U \backslash N$ holomorph ist, so ist f holomorph.–

Aus 9.3 und 8.5 folgt:

9.5 Satz von Morera: Sie $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f \in C(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph.
2. Sind z_0, z_1, z_2 irgendwelche Punkte aus G, so ist

$$\int\limits_{[z_0, z_1, z_2, z_0]} f(z) \, \mathrm{d}z = 0. -$$

9.6 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f \in C(U)$. Gibt es eine Gerade $g \subset \mathbb{C}$, derart daß $f|U \backslash g$ holomorph ist, so ist f holomorph.–

9.7 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und sei $f \in C(G)$. Seien $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}, (b_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in G mit $z_0 := \lim a_\nu \in G, z_1 := \lim b_\nu \in G$. Dann gilt:

$$\int\limits_{[a_\nu, b_\nu]} f(z) \, \mathrm{d}z \to \int\limits_{[z_0, z_1]} f(z) \, \mathrm{d}z. -$$

Mit einem kleinen Trick kann man nun 9.4 verallgemeinern. Man erhält den RIEMANN*schen Hebbarkeitssatz*:

9.8 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $z_0 \in U$. Ist die Funktion

$$f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$$

holomorph und beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|U\backslash\{z_0\} = f$.–
Die Funktion $\tilde{f}$ in 9.8 ist natürlich eindeutig bestimmt und heißt die *Fortsetzung* von f nach z_0.

Natürlich kann man 9.8 in eine zu 9.4 analoge Form bringen:

9.9 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $N \subset U$ eine Teilmenge ohne Häufungspunkte in U. Ist dann $f \in \mathcal{O}(U\backslash N)$ und lokal beschränkt, d.h. zu jedem $z_0 \in N$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z_0, derart daß $f|\tilde{U}$ beschränkt ist. Dann gibt es ein $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\tilde{f}|U\backslash N = f$.–

Zusammen mit 5.11 besitzt 9.5 eine hübsche Anwendung:

9.10 Schwarzscher Spiegelungssatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches symmetrisch zu $\mathbb{R}$ liegt, d.h.

$$\tilde{G} := \{\bar{z} : z \in G\} = G.$$

Sei $H := \{z \in G : \operatorname{Im} z > 0\}, H' := \{z \in G : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Dann gilt: Ist $f \in C(H')$ und $f|H \in \mathcal{O}(H), f(G \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|H' = f$.–
Aus dem Identitätssatz 13.4, den wir später beweisen, folgt, daß $\tilde{f}$ durch f eindeutig bestimmt ist, sofern

Natürlich kann 9.1 als Integralformel, d.h. zur Berechnung von Integralen, benutzt werden.

Beispiele:

9.11 Sei $z_0 = 1, r = 2$. Dann ist

$$\int\limits_{\kappa(1,2)} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\kappa(1,2)} \frac{\mathrm{e}^\zeta}{\zeta - 0}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^0 = 2\pi\mathrm{i}.–$$

9.12 Sei $z_0 = \mathrm{i}, r = 3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\kappa(\mathrm{i},r)} \frac{1+z+2z^2+3z^3}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{\kappa(\mathrm{i},r)} \frac{1+\zeta+2\zeta^2+3\zeta^3}{(\zeta-1)^2}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= 2\pi\mathrm{i}(1+z+2z^2+3z^3)'(1) \\
&= 2\pi\mathrm{i}(1+4+9) \\
&= 28\pi\mathrm{i}.-
\end{aligned}$$

In der Theorie wird 9.1 häufig benutzt, um von $f|\partial C$ auf f zu schließen. Ein typisches Beispiel!

9.13 Satz: Satz von Liouville: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion (sogenannte *ganze Funktion*) und *beschränkt*, so ist f konstant.–

Eine interessante Anwendung von 9.13 ist der folgende Satz:

9.14 Fundamentalsatz der Algebra: Sei f ein nichtkonstantes Polynom. Dann besitzt f eine Nullstelle.–A

9.15 Produktregel: Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{O}(G)$. Sei $\gamma : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg in G, $z_0 := \gamma(a), z_1 := \gamma(b)$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\gamma} \big(f' \cdot g\big)(z)\,\mathrm{d}z = [f \cdot g]_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{\gamma} \big(f \cdot g\big)'(z)\,\mathrm{d}z.-$$

9.16 Substitutionsregel: Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $g : G \to H, f : H \to \mathbb{C}$ holomorph. Darüberhinaus sei f integrabel. Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to G$ in G:

$$\int\limits_{\gamma} \big(f \circ g\big) \cdot g'(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{g\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.-$$

`Ergänzung zu 9.16:`

$(f \circ g) \cdot g'$ ist integrabel; genauer: Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$.–

9.17 Definition: Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Bereiche. Eine Funktion $g : U \to V$ heißt *biholomorph* (oder *konform*), wenn gilt:

1. g ist bijektiv.

2. g und g^{-1} sind holomorph.–

9.18 Satz: Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete. Es existiere eine biholomorphe Funktion $g : G \to H$. Dann gilt: H ist ein CAUCHY-Gebiet. $\Leftrightarrow$ G ist ein CAUCHY-Gebiet.–

Mit 9.18 folgt aus 3.21:

9.19 Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ ein CAUCHY-Gebiet.–

10 Konvergenzsätze für holomorphe Funktionen

10.1 Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf U. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ ist $(f_n|K)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent.
2. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z, derart daß $(f_n|U)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

In diesem Falle sagen wir, daß die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U *lokal gleichmäßig konvergent* ist.–

10.2 Konvergenzsatz von Weierstrass: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf U, welche auf U lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

1. $f \in \mathcal{O}(U)$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.–

10.3 Definition: Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $\mathcal{F}$ eine *Familie*, d.h. eine Menge von Funktionen auf M. $\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit:

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall z_1, z_2 \in M \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta.–$$

Insbesondere ist jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ auf M gleichmäßig stetig.

10.4 Satz und Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf U. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ ist
$$\mathcal{F}|K := \{f|K : f \in \mathcal{F}\}$$
gleichgradig stetig.

2. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z, derart daß $\mathcal{F}|\tilde{U}$ (analog definiert wie in 1) gleichgradig stetig ist. In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ *lokal gleichgradig stetig.*–

Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf M. $\mathcal{F}$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}_+$ gibt mit:
$$|f(z)| \leq C \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall z \in M.$$

10.5 Satz und Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf U. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ ist $\mathcal{F}|K$ beschränkt.

2. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z, derart daß $\mathcal{F}|\tilde{U}$ beschränkt ist.

In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ *lokal gleichmäßig beschränkt.*–

10.6 Satz: Lokal gleichmäßig beschränkte Familien holomorpher Funktionen sind lokal gleichgradig stetig, d.h. ist $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ eine lokal beschränkte Familie, so ist $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig.–

10.7 Satz von Ascoli-Arzelà: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen auf U mit folgenden Eigenschaften:

1. Es existiert eine abzählbare *dichte* Teilmenge N von U – d.h. in jeder offenen Teilmenge von N liegt ein Punkt von N – mit: $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ ist für jeden Punkt $z \in N$ eine beschränkte Menge,

2. $\mathcal{F}$ ist lokal gleichgradig stetig.

Dann besitzt jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ eine Teilfolge, die in U lokal gleichmäßig konvergiert.– Natürlich gilt 1 erst recht, wenn die folgende schärfere Bedingung erfüllt ist:
1′. Für jeden Punkt $z \in U$ ist $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ eine beschränkte Menge.
In diesem Fall betrachte man $N := U \cap \mathbb{Q}^2$.
Sei $\left\{f_n^{(l-1)}(z_l) : n, l \in \mathbb{N}\right\}$ beschränkt. Deshalb gibt es eine Teilfolge $\left(f_n^{(l)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\left(f_n^{(l-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die in z_l konvergiert. Wir betrachten nun die sogenannte *„Diagonalfolge“* $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}, g_k := f_k^{(k)}$.

Behauptung: Sei $l \in \mathbb{N}$. Dann ist $(g_k)_{k \geq l}$ eine Teilfolge von $\left(f_n^{(l)}\right)_{n \geq l}$.

Aus der Behauptung folgt:

1. $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in allen Punkten $z \in N$.

Aus 10.6 und 10.7 folgt:

10.8 Satz von Montel: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ lokal gleichmäßig beschränkt. Dann enthält jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.–

10.9 Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$. $\mathcal{F}$ heißt eine *normale Familie*, wenn jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.–

Lokal gleichmäßig beschränkte Funktionen holomorpher Funktionen sind also normal.

Kapitel 4

Komplex analytische Funktionen

11 Reihen im Komplexen

Sei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Zahlenfolge. Dann wird wie im Reellen die zugehörige *Reihe* $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ als die Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Statt $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ schreiben wir auch $\sum\limits_{\nu\geq 0} a_\nu$. Damit ist der Begriff der Konvergenz einer Reihe klar. Ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ konvergent, so notieren wir den Limes mit $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

11.1 $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ ist konvergent. $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\ a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\ a_\nu$ sind konvergent.
In diesem Fall ist dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{Re}\ a_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{Im}\ a_\nu. –$$

Ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ konvergent, so gilt $a_\nu \to 0$.

$\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} |a_\nu|$ konvergiert.

Wegen $|a_\nu| \leq |\mathrm{Re}\ a_\nu| + |\mathrm{Im}\ a_\nu|$ und $\max\big\{|\mathrm{Re}\ a_\nu|, |\mathrm{Im}\ a_\nu|\big\} \leq |a_\nu|$ folgt:

11.2 $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ ist absolut konvergent. $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\ a_\nu$ und $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\ a_\nu$ sind absolut konvergent.–

Wir verzichten darauf, das Cauchysche Konvergenzkriterium (vgl. 2.2) für Reihen zu formulieren. Es lautet völlig analog wie im Reellen. Aus dem

CAUCHYschen Konvergenzkriterium folgt, daß jede absolut konvergente Reihe konvergent ist und daß $\left|\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\right| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ gilt.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf M. Dann ist die Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Funktionenreihe. Wir notieren sie mit $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ bzw. $\sum\limits_{\nu\geq 0} f_\nu$. Ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ punktweise, d.h. in jedem Punkt $z \in M$ konvergent, so existiert der Limes

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu : M \to \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{\nu=0}^{\infty} f(z).$$

Die Redeweisen der punktweisen absoluten sowie der gleichmäßigen Konvergenz verstehen sich von selbst. Ist $M = U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, so ist auch der Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz klar.

Aus 10.2 folgt:

11.3 Satz von Weierstraß: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{O}(U)$. Ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ lokal gleichmäßig konvergent, so gilt:

1. $$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \in \mathcal{O}(U),$$

2. für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu^{(k)}$ lokal gleichmäßig konvergent und

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu\right)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(k)}.-$$

Ein besonderes Konzept in der Theorie der Funktionenreihen ist das der normalen Konvergenz, d.h. der Konvergenz im Sinne der Supremumsnorm.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$\|f\| = \|f\|_M := \sup\big\{|f(z)| : z \in M\big\}$$

die *Supremumsnorm* von f. (Auf die Normeigenschaften von $\|\cdot\|$ wollen wir hier nicht näher eingehen.) Ist $M = K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f beschränkt, also $\|f\|_K := \|f|K\|$ definiert. Insbesondere gilt dies, wenn $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in C(U)$ und $K \subset U$ ein Kompaktum ist.

11.4 Definition: Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen auf M. $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ heißt *normal konvergent*, wenn $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \|f_\nu\|_M$ konvergent ist.–

Normal konvergente Reihen sind punktweise absolut konvergent, insbesondere (punktweise) konvergent. Darüberhinaus gilt:

11.5 Satz: Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen auf M. Ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ normal konvergent, so ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ auch gleichmäßig konvergent.–

Die normale Konvergenz ist u.a. wegen des folgenden einfachen *Majorantenkriteriums* von Interesse:

11.6 Satz: Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf M. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gebe es eine Zahl $a_\nu \in \mathbb{R}_+$, derart daß gilt

1. $|f_\nu(z)| \leq a_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$
2. $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu$ ist konvergent.

Dann ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu$ normal konvergent.–

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *lokal beschränkt*, wenn die folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

1. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ ist $f|K$ beschränkt.
2. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z, derart daß $f|U$ beschränkt ist.

Auf den Beweis der Äquivalenz – es ist der Spezialfall $\mathcal{F} = \{f\}$ von 10.5 – verzichten wir.

11.7 Satz und Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge lokal beschränkter Funktionen auf U. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für jedes Kompaktum $K \subset U$ ist $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu|K$ normal konvergent.
2. Zu jedem Punkt $z \in U$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z, derart daß alle f_ν auf $\tilde{U}$ beschränkt sind und $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} (f_\nu|\tilde{U})$ normal konvergent ist.

In diesem Fall heißt $\sum_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu$ *lokal normal konvergent.*–

Der große Beispielbereich für diesen Paragraphen 11 sind die Potenzreihen, die wir nun behandeln werden.

12 Potenzreihen

12.1 Definition: Eine *Potenzreihe* ist eine Funktionenreihe auf $\mathbb{C}$ der Form

$$P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu \quad (a_\nu \in \mathbb{C}).–$$

P ist also die Polynomfolge $\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \right)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Deshalb sind zwei Potenzreihen $P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu, Q = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} b_\nu z^\nu$ genau dann gleich, wenn die *Koeffizienten* $a\nu, b_\nu$ jeweils übereinstimmen.

Das bekannte und wichtigste `Beispiel` ist die geometrische Reihe.

12.2 GEO $:= \sum_{\nu \in \mathbb{N}} z^\nu$ heißt *geometrische Reihe*. Sie ist auf $D = D(0,1)$ lokal normal konvergent und besitzt dort den Limes $\frac{1}{1-z}$, also

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in D.$$

GEO ist in keinem Punkt aus $\mathbb{C} \backslash D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1 \right\}$ konvergent.–

12.3 Lemma: Sei $P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu$. Es existiere ein $w \in \mathbb{C}^*$ mit: $(a_\nu w^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt (z.B. $\sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu w^\nu$ ist konvergent). Dann ist P auf $D(0,s)$, $s := |w|$, lokal normal konvergent; der Limes ist eine holomorphe Funktion.–

12.4 Definition: Sei $P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu$. Dann heißt

$$r_P := \sup \left\{ |w| : (a_\nu w^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt. } \right\}$$

der *Konvergenzradius* von P und

$$K_P := D(0, r_P)$$

heißt *Konvergenzkreis*.–

Im Fall $r_P = 0$ ist $K_P = \varnothing$, im Fall $r_P = \infty$ ist $K_P := \mathbb{C}$.

12.5 Definition und Satz: Sei $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$. P heißt *konvergent*, wenn $r_P > 0$ ist. Dann ist

$$p := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu : K_P \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion, die durch P *definierte holomorphe Funktion*.–
Vorsicht! Jede Potenzreihe $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$ ist in 0 konvergent; aber nicht jede Potenzreihe ist konvergent. Zum `Beispiel`

$$P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \nu^\nu z^\nu$$

hat den Konvergenzradius $r_P = 0$. Ist nämlich $w \in \mathbb{C}^*$, so gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\nu_0 w| > 1$. Darum ist $(\nu^\nu w^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt:

$$|\nu^\nu w^\nu| \geq \nu_0^\nu |w|^\nu = |\nu_0 w|^{\nu-\nu_0} \cdot |\nu_0 w|^{\nu_0} \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

Eine Potenzreihe P ist genau dann konvergent, wenn es ein $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, gibt, so daß $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu w^\nu$ konvergiert.
K_P ist die größte offene Menge, in der P punktweise konvergiert.

12.6 Satz: Sei $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$. Dann ist

$$K_P = \left\{ w \in \mathbb{C} : \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu w^\nu \text{ ist eine konvergente Zahlenreihe.} \right\}^0 .–$$

12.7 Sei $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$. Dann stimmt r_P mit dem Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} |a_\nu| x^\nu$ überein.–

12.8 Formel von Cauchy-Hadamard: Sei $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$, und sei

$$s := \limsup \sqrt[\nu]{|a_\nu|}.$$

Dann ist $r_P = \frac{1}{s}$.–
Dabei sei $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.

12.9 Sei $P = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$, und sei $a_\nu \neq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. Ist $\left(\frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist

$$r_P = \lim \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu+1}|}.–$$

Bei 12.9 ist Konvergenz gegen ∞ zugelassen.
Die **Potenzreihenbeispiele** aus der Analysis-Vorlesung übertragen sich:

12.10 Definition:

$$\mathrm{EXP} := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{z^\nu}{\nu!}$$

heißt *Exponentialreihe*.–

12.11 Definition:

$$\mathrm{SIN} := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}$$

heißt *Sinusreihe*.–

12.12 Definition:

$$\mathrm{COS} := \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu}$$

heißt *Cosinusreihe*.–
Alle genannten Reihen haben den Konvergenzradius ∞.

12.13 Satz: Sei $P = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$ und sei $P' = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu$. Dann gilt:

1. $r_P = r_{P'}$.
2. Ist P konvergent, also $r_P > 0$, so ist

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\right)' = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu\right)$$

auf K_P.–

12.14 Satz: Sei $P = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu z^\nu$ konvergent und sei $p := \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ auf K_P.
Dann gilt:

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.–$$

Der folgende Satz zeigt, daß eine Potenzreihe P in noch viel stärkerem Maße durch die Werte von p festgelegt ist:

12.15 Identitätssatz für Potenzreihen: Seien $P = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu$ und $Q = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} b_\nu z^\nu$ konvergente Potenzreihen. Sei

$$\begin{aligned} p &:= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \text{ auf } K_P, \\ q &:= \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \text{ auf } K_Q. \end{aligned}$$

Es existiere eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $K_P \cap K_Q$ mit den Eigenschaften:

1. $z_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, z_k \to 0$;
2. $p(z_k) = q(z_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $P = Q$.–

13 Komplex-analytische Funktionen

Um die Potenzreihentheorie auf Funktionen anwenden zu können, benötigen wir einen etwas allgemeineren Potenzreihenbegriff. Wir müssen Potenzreihen gewissermaßen verschieben können.

Sei $P = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu z^\nu$ eine Potenzreihe im Sinne von 12 und sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Funktionenreihe

$$P_0 := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

eine *Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt* z_0. Die Begriffe und die Aussagen aus 12 können sinngemäß übertragen werden:

$r_{P_0} := r_P$ heißt der *Konvergenzradius* von P_0.

P_0 heißt *konvergent*, wenn $r_{P_0} > 0$ ist, d.h. wenn P_0 in einem Punkt $w \neq z_0$ konvergiert;

$K_{P_0} := D(z, r_{P_0})$ heißt der *Konvergenzkreis* von P_0.

K_{P_0} ist die größte offene Menge, in der P_0 punktweise konvergiert. Ist P_0 konvergent, so ist wieder

$$p_0 := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu : K_{P_0} \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion, die durch P_0 *definierte holomorphe Funktion*. Aus 12.14 schließt man sofort:

$$a_k = \frac{p_0^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

13.1 Definition und Bemerkung: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *komplex-analytisch*, kurz: $\mathbb{C}$-*analytisch*, wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine konvergente Potenzreihe $P_0 = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit Entwicklungspunkt z_0 sowie ein $r \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit:

1. $D(z_0, r) \subset U, r \leq r_{P_0}$;
2. f stimmt auf $D(z_0, r)$ mit der durch P_0 definierten holomorphen Funktion überein.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$; insbesondere ist P_0 durch f eindeutig bestimmt. P_0 heißt die *Taylorreihe* von f in z_0. Die Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \text{ auf } D(z_0, r)$$

heißt *Potenzreihenentwicklung* von f um z_0 (auf der Kreisscheibe $D(z_0, r)$).– $\mathbb{C}$-analytische Funktionen sind holomorph. Erstaunlicherweise gilt auch die Umkehrung!

13.2 Analytizitätssatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist f $\mathbb{C}$-analytisch. Genauer: Sei $z_0 \in U$. Dann besitzt f eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

auf der Kreisscheibe $D(z_0, r_0)$, wobei

$$r_0 = \sup\big\{ r \in \mathbb{R}_+^* : D(z_0, r) \subset U \big\}$$

ist. Dabei besitzen die a_k, $k \in \mathbb{N}$, die folgende Integraldarstellung

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta, \quad 0 < r < r_0.–$$

Wir fassen alle von uns behandelten Charakterisierungen der holomorphen Funktionen zusammen:

13.3 Fundamentalsatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph, d.h. f ist überall $\mathbb{C}$-differenzierbar.
2. f ist überall $\mathbb{R}$-differenzierbar und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (vgl. 4.10 (3)) gelten überall.
3. f ist lokal integrabel (vgl. 8.11).
4. f ist $\mathbb{C}$-analytisch.–

Der Identitätssatz für Potenzreihen 12.15 zieht einen Identitätssatz für holomorphe Funktionen nach sich:

13.4 Identitätssatz für holomorphe Funktionen Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$. Existiert eine Teilmenge N von G mit Häufungspunkt in G, derart daß $f|N = g|N$ ist. Dann ist $f = g$.–
13.4 hat eine algebraische Konsequenz für $\mathcal{O}(G)$!

13.5 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $\mathcal{O}(G)$ ein Integritätsring.–
Ist $U \subset \mathbb{C}$ ein nicht zusammenhängender Bereich, so ist $\mathcal{O}(U)$ natürlich kein Integritätsring!

13.6 Definition und Satz: Sei $I \propto \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Es existiert ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(G)$ mit $G \cap \mathbb{R} = I, \tilde{f}|I = f$.
2. Zu jedem Punkt $x_0 \in I$ gibt es eine konvergente reelle Potenzreihe $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu x^\nu$, so daß für alle Punkte aus einer Intervallumgebung $I_0 \propto I$ von x_0 gilt: $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu (y - x_0)^\nu$ ist konvergent und $f(y) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (y - x_0)^\nu$ auf I_0.

In diesem Fall heißt f *reell-analytisch*, kurz $\mathbb{R}$-*analytisch*. Die Funktion $\tilde{f}$ ist wegen des Identitätssatzes eindeutig bestimmt und heißt die *holomorphe Fortsetzung* von f nach G.–
Man kann den Begriff der reell-analytischen Funktion sehr leicht auf offene Teilmengen J von $\mathbb{R}$ ausdehnen: Sei J offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : J \to \mathbb{R}$

eine Funktion. f heißt reell-analytisch, wenn f auf jeder Zusammenhangskomponente von J reell-analytisch ist. Die Eigenschaft reell-analytisch zu sein, ist eine lokale Eigenschaft.

Die holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ von f nach G ist zwar eindeutig bestimmt. Allerdings ist G nicht eindeutig bestimmt. Es ist gar nicht so einfach, „optimale" Fortsetzungsgebiete G für eine reell-analytische Funktion zu definieren.

Sei $P = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein reelles Polynom. Ersetzen wir die reelle Veränderliche x durch die komplexe Veränderliche z, so erhalten wir die holomorphe Fortsetzung $\tilde{P} = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von P. Ähnlich kann man bei einer reellen rationalen Funktion verfahren.

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (vgl. 3.18) ist die holomorphe Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion nach $\mathbb{C}$. Bekanntlich gilt:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mathrm{e} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die durch die Exponentialreihe EXP definierte holomorphe Funktion, also $\mathrm{e}(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, $z \in \mathbb{C}$, so ist auch e die holomorphe Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion nach $\mathbb{C}$. Darum muß $\mathrm{e} = \exp$ sein. D.f.

13.7 EXP ist die Taylorreihe von exp in 0; die Potenzreihenentwicklung von exp um 0 auf $\mathbb{C}$ lautet

$$\mathrm{e}^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}.-$$

13.8 Satz und Definition: Die durch SIN bzw. COS definierten holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind die holomorphen Fortsetzungen von sin bzw. cos auf $\mathbb{C}$. Sie werden wieder mit sin bzw. cos notiert und heißen auch wieder *Sinus-* bzw. *Cosinusfunktion*,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cos z &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.- \end{aligned}$$

Die aus der reellen Analysis bekannten Formeln für exp, sin und cos übertragen sich auf Komplexe.

13.9 Additionstheoreme: $\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$,
2. $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$,
3. $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$.–

13.10

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.-$$

13.11

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin \qquad \text{auf } \mathbb{C}.-$$

13.12 Eulersche Formel:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}.-$$

13.13 $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
2. $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.–

13.14

$$\begin{array}{rcll} e^z & = & 1 & \Leftrightarrow \quad z \in 2\mathbb{Z} \cdot \pi i, \\ e^z & = & -1 & \Leftrightarrow \quad z \in (2\mathbb{Z}+1) \cdot \pi i.- \end{array}$$

13.15

$$\begin{array}{rcll} \sin z & = & 0 & \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{Z} \cdot \pi, \\ \cos z & = & 0 & \Leftrightarrow \quad z \in (\mathbb{Z}+1/2)\pi.- \end{array}$$

13.16 Satz: Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\sin(z+w) = \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w \in 2\mathbb{Z} \cdot \pi$,
2. $\cos(z+w) = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow w \in 2\mathbb{Z} \cdot \pi$.–

Wegen 13.15 kann man in kanonischer Weise tan, cot ins Komplexe fortsetzen. Wir verzichten auf Einzelheiten.

$\log := \log_{-\pi}$ ist die holomorphe Fortsetzung der üblichen Logarithmusfunktion $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$; der Definitionsbereich von $\log_{-\pi}$ ist $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$.

Mit Hilfe des Identitätssatzes 13.4 sind wir in der Lage eine Lücke aus 9 zu schließen:

13.17 Ergänzung zum Schwarzschen Spiegelungssatz: Die holomorphe Funktion $\tilde{f}$ aus dem SCHWARZschen Spiegelungssatz ist eindeutig bestimmt.–

Der Satz von LIOUVILLE besitzt eine natürliche Verallgemeinerung:

13.18 Satz: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Existieren eine Zahl $C \in \mathbb{R}_+$, eine Zahl $R \in \mathbb{R}_+$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(z)| \leq C|z|^n, |z| \geq R$ so ist $f = 0$ oder ein Polynom von einem Grad $\leq n$.–

Mit Hilfe der Identitätssatzes 13.4 erhalten wir eine interessante Ergänzung zum Satz von MONTEL.

13.19 Satz von Vitali: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine normale Familie. Zu der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ gebe es eine Teilmenge N von G mit Häufungspunkt in G, derart daß $\big(f_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $z \in N$ konvergiert. Dann ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent.–

14 Das Wert- und Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen

Das Abbildungsverhalten und auch das Wertverhalten holomorpher Funktionen ist ganz anders als man aus der reellen Analysis gewohnt ist.

14.1 Maximumsprinzip: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in G$, so ist f konstant.–

Eine andere Variante des Maximumsprinzips ist die folgende:

14.2 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $f \in C(\bar{G}), f|G \in \mathcal{O}(G)$. Dann gibt es ein $z_0 \in \partial G$ mit $\|f\|_{\bar{G}} = |f(z_0)|$.–

Sei $U \subset G$ ein beschränkter Bereich, $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ stetig, $f|U$ holomorph. Dann gibt es ein $z_0 \in \partial U$ mit:

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in \bar{U}.$$

Natürlich hat das Maximumsprinzip viele Anwendungen:

14.3 Satz: Sei $U \subset G$ ein beschränkter Bereich und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $\bar{U}$, deren Beschränkungen auf U holomorph sind. Dann gilt: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ∂U gleichmäßig konvergent, so auch auf $\bar{U}$.–

Eine weitere Anwendung:

14.4 Lemma von Schwarz: Sei $f : D \to D$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt:

1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D$,
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Ferner gilt:

1. Gibt es ein $z_0 \in D, z_0 \neq 0$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so ist f von der Form $f(z) = c \cdot z$ mit $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$.
2. Ist $|f'(0)| = 1$, so ist f ebenfalls von der Form $f(z) = c \cdot z$ mit $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$.–

Zur Erinnerung: $D = D(0,1)$.

Aus dem Maximumsprinzip 14.1 folgt durch Quotientenbildung das Minimumsprinzip.

14.5 Minimumsprinzip: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Für f gelte $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$. Gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \geq |f(z_0)| \quad \forall z \in G$, so ist f konstant.–

Die zu 14.2 analoge Variante des Minimumsprinzip lautet:

14.6 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $f \in C(\bar{G}), f|G \in \mathcal{O}(G)$. Es gelte $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$. Dann gibt es ein $z_0 \in \partial G$ mit $\inf_{\bar{G}} |f(z)| = |f(z_0)|$.–

Eine interessante und wichtige Folgerung aus 14.6 ist der Satz von der Gebietstreue:

14.7 Satz von der Gebietstreue: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant. Dann ist $f : G \to \mathbb{C}$ offen und $f(G) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.–

Für die Klasse der holomorphen Funktionen ist der Satz über reguläre Abbildungen (vgl. 3.17) leichter zu beweisen und kommt auch mit weniger Voraussetzungen aus. Natürlich kann er aber auch sehr leicht aus 3.17 gefolgert werden.

14.8 Satz über reguläre Abbildungen: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für alle $z \in U$ sei $f'(z) \neq 0$. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \propto U$ von z_0, derart daß $f|\tilde{U} : \tilde{U} \to f(\tilde{U})$ biholomorph ist.–

Wegen 14.7 ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von U und auch überhaupt offen.

Im Grunde genommen sind holomorphe Funktionen, von Transformationen abgesehen, sehr einfach, nämlich nur Potenzfunktionen. Das wollen wir im Weiteren zeigen.

14.9 Sei $w_0 \in \mathbb{C}^*$ und sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Dann gibt es genau m Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ mit

$$w_0 = z_j^m, j = 1, \ldots, m.$$

Ist z_0 eine dieser Zahlen, so erhält man alle in der Form

$$z_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{m} \cdot k}, k = 1, \ldots, m.–$$

14.10 Definition: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Dann heißt die offene Menge

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta) &:= \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : r \in \mathbb{R}_+^*, \alpha < \varphi < \beta \right\} \\ &= \exp\bigl(\{\mathbb{R} \times]\alpha, \beta[\}\bigr) \end{aligned}$$

der durch α, β definierte *Winkelbereich*.–

Es ist

$$W(\alpha, \beta) = W(\alpha + 2\pi k, \beta + 2\pi k), k \in \mathbb{Z},$$

und

$$W(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}.$$

14.11 Satz und Definition: Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. Dann ist $p_m : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, p_m(z) = z^m$ lokal biholomorph. Genauer: Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann induziert p_m eine biholomorphe Abbildung

$$W\left(\varphi_0, \varphi_0 + \frac{2\pi}{m}\right) \to W(m\varphi_0, m\varphi_0 + 2\pi).$$

Sei $\psi_0 := m\varphi_0$. Dann notieren wir die Umkehrabbildung ${}_{\psi_0}\!\sqrt[m]{}$, und sprechen von einer m-ten *Wurzelfunktion*. Es gilt:

$${}_{\psi_0}\!\sqrt[m]{w} = \mathrm{e}^{\frac{1}{m}\,{}_{\psi_0}\!\log w}.$$

$\sqrt[m]{} := {}_{-\pi}\!\sqrt[m]{}$ heißt *Hauptzweig* der m-ten *Wurzelfunktion*. $\sqrt[m]{}$ ist die holomorphe Fortsetzung der reellen m-ten Wurzelfunktion auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$.–

Es gilt $p_m'(z) = mz^{m-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$. Darum ist p_m lokal biholomorph wegen 14.8, d.h. zu jedem $z_0 \in \mathbb{C}^*$ existiert eine Umgebung $\tilde{U} \propto \mathbb{C}^*$ von z_0, derart daß $p_m|\tilde{U} : \tilde{U} p_m(\tilde{U})$ biholomorph ist.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Gibt es einen Punkt $z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k \geq 1$, so folgt aus der Potenzreihendarstellung von f um z_0, daß f auf einer Umgebung von z_0 und dann auch überhaupt konstant sein muß.

Andersherum: Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant, so gibt es zu jedem $z \in G$ eine Ableitung $f^{(k)}(z) \neq 0, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

14.12 Normalformsatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in \mathcal{O}(U), z_0 \in U, w_0 := f(z_0)$. Für die Zahl $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, gelte:

$$\begin{aligned} f^{(m)}(z_0) &\neq 0, \\ f^{(n)}(z_0) &= 0, n = 1, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Umgebung $U_0 \propto U$ von z_0, eine offene Umgebung V_0 von w_0, sowie biholomorphe Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} U_0 & & V_0 \\ \varphi \uparrow & \text{und} & \downarrow \psi, \\ D & & D \end{array}$$

derart daß $f(U_0) \subset V_0$ ist und

$$\psi \circ f \circ \varphi : D \to D$$

die Potenzfunktion z^m ist.–

Vervollständigen wir das obige Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V_0 \arrow[d, "\psi"] \\ D \arrow[r, "z^m"] & D, \end{tikzcd}$$

und identifizieren wir U_0 vermöge φ mit D sowie V_0 vermöge ψ mit D, so ist f einfach die Potenzfunktion z^m. Es folgt: f ist eine surjektive Abbildung von U_0 auf V_0. Sie ist genau dann auch injektiv, also eine biholomorphe Abbildung von U_0 auf V_0, wenn $m = 1$, also $f'(z_0) \neq 0$ ist. Im Fall $m \geq 2$ hat jeder Punkt $w \in V_0$, $w \neq w_0$, genau m verschiedene Urbilder in U_0.

Beweis: ... Wir betrachten den Spezialfall $z_0 = 0, w_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(z) &:= \gamma(rz) \quad , \quad \tilde{\psi}(w) := \tfrac{w}{r^m} \\ \tilde{U}_0 &:= \gamma\big(D(0,r)\big) \quad , \quad \tilde{V}_0 := f\left(\tilde{U}_0\right) \end{aligned}$$

Nun zum allgemeinen Fall: Für $d \in \mathbb{C}$ bezeichne τ_d die Translation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + d$.

$$\begin{aligned} \varphi &:= \tau_{z_0} \circ \tilde{\varphi} &&, \ \psi := \tilde{\psi} \circ \tau_{-w_0} \\ U_0 &:= \tau_{z_0}\left(\tilde{U}_0\right) = \left\{z + z_0 : z \in \tilde{U}_0\right\} &&, V_0 := \tau_{-w_0}^{-1}\left(\tilde{V}_0\right) = \tau_{w_0}\left(\tilde{V}_0\right) = f(U_0). - \end{aligned}$$

14.13 Definition: Seien U, f, z_0, w_0, m wie in 14.12. Dann heißt m die *Ordnung* von f in z_0. Wir schreiben für m auch $\text{ord}_{z_0} f$ und sagen, f habe in z_0 eine w_0-Stelle der Ordnung oder *Vielfachheit* m.

Aus 14.12 folgt:

14.14 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$.

Kapitel 5

Singularitäten

15 Die abgeschlossene Ebene

In der reellen Analysis ist es sinnvoll, $+\infty$ und $-\infty$ als Limiten von Folgen bzw. Funktionen zuzulassen. Ähnlich ist es in der komplexen Analysis, wobei allerdings die Unterscheidung zwischen $+\infty$ und $-\infty$ keinen Sinn macht.

Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* ∞, wenn es zu jedem $R \in \mathbb{R}_+$ ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|z_\nu| > R \quad \forall \nu \geq \nu_0$. Wir schreiben dann $z_\nu \to \infty$ bzw. $\infty = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu$.

Offensichtlich gilt: $z_\nu \to \infty \Leftrightarrow |z_\nu| \to +\infty$.

Sei $M \subset \mathbb{C}$. Dann heißt ∞ ein *Häufungspunkt* von M, wenn es zu jedem $R \in \mathbb{R}_+$ ein Element $z \in M$ mit $|z| > R$ gibt. Äquivalent dazu ist, daß es eine Folge $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in M gibt mit $z_\nu \to \infty$.

Sei $M \subset \mathbb{C}$, und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von M, so ist klar, wie man definieren wird, daß ∞ der *Limes* von f für $z \to z_0$ ist: Zu jedem $R \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ mit:

$$|f(z)| > R \quad \forall z \in M, z \neq z_0, |z - z_0| < \delta.$$

Natürlich schreiben wir wieder $\infty = \lim_{z\to z_0} f(z)$.

Ist ∞ ein Häufungspunkt von M, so ist ebenfalls klar, wie man definieren wird daß $c \in \mathbb{C}$ oder auch ∞ der *Limes* von f für $z \to \infty$ ist.

Man kann die Betrachtungen vereinheitlichen, wenn man $\mathbb{C}$ durch Aufnahme von ∞ erweitert:

15.1 Definition: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt die *abgeschlossene Ebene* oder auch die Riemann*sche Zahlenkugel*. (Bzgl. der Bezeichnung Zahlenkugel vgl. unsere

Ausführungen am Ende dieses Paragraphen.) Eine Menge $\hat{U} \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt eine *Umgebung* von ∞, wenn $\infty \in \hat{U}$ ist und wenn es ein $R \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset \hat{U}$.–

Unter Benutzung des Umgebungsbegriffes kann man die Konvergenz von Folgen gegen einen Punkt $c \in \mathbb{C}$ oder auch gegen ∞ einheitlich definieren: Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge, wenn es zu jeder Umgebung U von c ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_\nu \in U \quad \forall \nu \geq \nu_0$.

Ebenso einfach kann man den *Limes*begriff für Funktionen $f : M \to \hat{\mathbb{C}}, M \subset \hat{\mathbb{C}}$, behandeln. Dabei wird unser Funktionsbegriff durch Zulassung von ∞ erweitert.

Natürlich ist es sinnvoll, auch stetige Funktionen $f : M \to \hat{\mathbb{C}}$, $M \subset \hat{\mathbb{C}}$, zu betrachten:

Sei $M \subset \hat{\mathbb{C}}$, und sei $f : M \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Funktion. f ist in einem Punkte $z_0 \in M$ *stetig*, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(z_0)$ eine Umgebung U von z_0 gibt mit $f(U \cap M) \subset V$. f heißt *stetig (auf M)*, wenn f in jedem Punkt von M stetig ist.

Seien $M, N \subset \hat{\mathbb{C}}$ und sei $f : M \to N$ eine Funktion. f heißt eine *topologische Abbildung* oder *Homöomorphismus*, wenn gilt:

1. f ist bijektiv,

2. f, f^{-1} sind stetig (auf M bzw. N).

15.2 Die Abbildung $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{für } z = \infty \\ \infty & \text{für } z = 0 \end{cases},$$

ist ein Homöomorphismus.–

Doch nun zur Beschreibung von $\hat{\mathbb{C}}$ als Zahlenkugel! Sei $S_2 := \{(z, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$, $N := (0, 0, 1)$ der *Nordpol*. Sei $\varphi : S_2 \to \hat{\mathbb{C}}$ die *stereographische Projektion*, erweitert um $N \mapsto \infty$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{|z|} &= \frac{1}{1-u} \quad \text{2. Strahlensatz, Seitenansicht} \\ \varrho &= \frac{|z|}{1-u}, \\ \varphi(\xi) &= \frac{z}{1-u}. \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist bijektiv und, mehr noch, ein Homöomorphismus. (Auf eine genaue Definition der Begriffes „Homöomorphismus“ für diese Situation und Beweise wollen wir verzichten.) Nun kann man $\hat{\mathbb{C}}$ mit S_2 identifizieren.

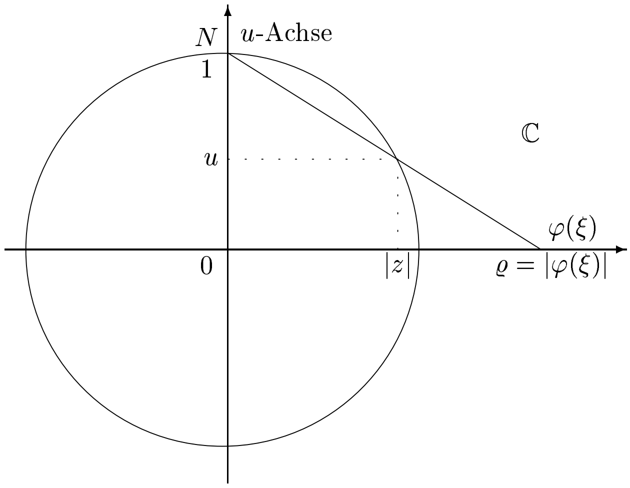


Abbildung 5.1: Seitenansicht der stereographischen Projektion

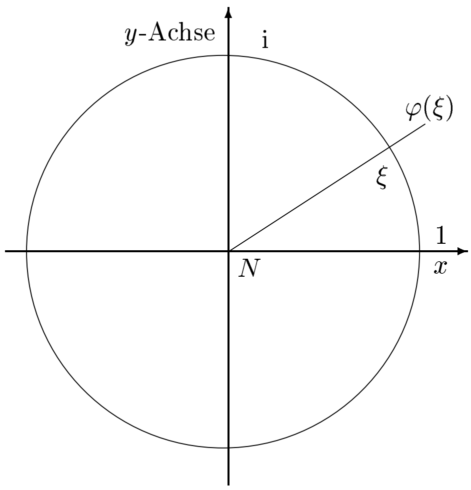


Abbildung 5.2: Draufsicht der stereographischen Projektion

16 Holomorphe Funktionen auf Kreisringen

16.1 Bezeichnungen: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq r < R \leq \infty$. Dann sei

$$D(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

und

$$\bar{D}(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}.–$$

Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\log_{\varphi_0}\big(D(0, r, R)\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\big) =]\log r, \log R[\times]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[.$$

Im Fall $r = 0$ sei $\log r := -\infty$, im Fall $R = 0$ sei $\log R := \infty$.

Daraus folgt, daß $D(0, r, R)\backslash\mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ ein Cauchy-Gebiet ist. Entsprechend ist auch

$$D(z_0, r, R)\backslash(z_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0})$$

ein Cauchy-Gebiet.

16.2 Satz von Cauchy für Kreisringe: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, 0 < r < R < \infty$, U eine offene Umgebung von $\bar{D}(z_0, r, R)$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_{\kappa(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(z_0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z.–$$

Ergänzung zu 16.2: Die Funktion $g : [r, R] \to \mathbb{C}$,

$$g(\varrho) := \int_{\kappa(z_0,\varrho)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

ist konstant.–

Aus dem Satz von Cauchy für Kreisringe folgt sofort eine Cauchysche Integralformel.

16.3 Cauchysche Integralformel für Kreisringe: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, 0 < r < R < \infty, U$ eine offene Umgebung von $\bar{D}(z_0, r, R)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_{\kappa(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\kappa(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right) \quad \forall z \in D(z_0, r, R).–$$

Aus 16.3 folgt eine charakteristische Zerlegungsmöglichkeit für holomorphe Funktionen auf Kreisringen:

16.4 Satz und Definition: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq r < R \leq \infty, f \in \mathcal{O}\big(D(z_0, r, R)\big)$. Dann gibt es Funktionen

$$f_1 \in \mathcal{O}\big(\mathbb{C}\backslash \bar{D}(z_0, r)\big), f_2 \in \mathcal{O}\big(D(z_0, R)\big)$$

mit:

1. $f = f_1 + f_2$ auf $D(z_0, r, R)$
2. $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$.

Die Funktionen f_1, f_2 sind durch f eindeutig bestimmt. f_1 heißt der *Hauptteil* und f_2 der *Nebenteil* von f. Die Darstellung

$$f = f_1 + f_2$$

heißt die *Laurentzerlegung* von f.–
Im Fall $r = 0$ ist $\bar{D}(z_0, r) := \{z_0\}$, im Fall $R = \infty$ ist $D(z_0, R) := \mathbb{C}$.
Wir betrachten den Hauptteil f_1 aus 16.4. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \to \bar{D}(z_0, r) \to D\left(0, \frac{1}{r}\right)\backslash\{0\},$$

$$\varphi(z) := \frac{1}{z - z_0} \quad \left(\frac{1}{0} := \infty\right)$$

ist biholomorph und

$$\varphi^{-1}(w) = z_0 + \frac{1}{w}.$$

Dann ist

$$g : D\left(0, \frac{1}{r}\right)\backslash\{0\} \to \mathbb{C},$$

$$g(w) := f_0 \circ \varphi^{-1}(w) = f_1\left(z_0 + \frac{1}{w}\right)$$

eine holomorphe Funktion mit

$$\lim_{w\to 0} g(w) = \lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0.$$

Deshalb ist g zu einer holomorphen Funktion $\tilde{g} : D\left(0, \frac{1}{r}\right) \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{g}(0) = 0$ fortsetzbar. Sei

$$\tilde{g}(w) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu w^\mu$$

die Potenzreihendarstellung von $\tilde{g}$ auf $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$. Dann gilt:

$$f_1(z) = \tilde{g}\big(\varphi(z)\big) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{\mu \geq 1} b_\mu w^\mu$ ist auf $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$, insbesondere auf $D\left(0, \frac{1}{r}\right) \setminus \{0\}$ bzw. auf $D(0,s)\setminus\{0\}$ lokal normal konvergent; die Reihe $\sum\limits_{\mu \geq 1} b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}$ ist es dann auf $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(z_0, r)$. Eine genauere Betrachtung liefert lokal normale Konvergenz der Reihe $Q := \sum\limits_{\mu\geq 1} b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}$ auf $\mathbb{C}\setminus\bar{D}\left(z_0, \frac{1}{s}\right)$ bzw. auf $\mathbb{C}\setminus\bar{D}(z_0, r)$, wobei $s = r_{\tilde{Q}}$, $\tilde{Q} := \sum\limits_{\mu\geq 1} b_\mu w^\mu$, ist. Also:

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \underbrace{b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}}_{b_\mu (z-z_0)^{-\mu}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \quad ; z \in D(z_0, r, R)$$

$K_Q := \mathbb{C}\setminus\bar{D}\left(z_0, \frac{1}{s}\right)$ heißt der *Konvergenzbereich* von Q. Statt $\sum\limits_{\mu\geq 1} b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}$ schreibt man meistens $\sum\limits_{\nu \leq 1} b_{-\nu}(z-z_0)^\nu$ und statt $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \frac{1}{(z-z_0)^\mu}$ meistens $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{-1} b_{-\nu}(z-z_0)^\nu$.

16.5 Definition: Eine *Laurentreihe* L mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Paar (Q, P) von Funktionenreihen der Form

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\nu \leq -1} a_\nu (z-z_0)^\nu, \\ P &= \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu (z-z_0)^\nu. \end{aligned}$$

Q heißt *Haupt-* und P *Nebenteil*. Man schreibt auch

$$L = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu (z-z_0)^\nu.$$

L heißt *konvergent*, wenn sowohl Q, d.h.

$$\tilde{Q} := \sum_{\mu \geq 1} a_{-\mu} w^\mu,$$

als auch P konvergent sind, und wenn

$$K_L := K_Q \cap K_P \neq \varnothing$$

ist. Der Kreisring K_L heißt dann der *Konvergenzbereich* von L. Auf ihm sind sowohl Q als auch P lokal normal konvergent und definieren dort eine holomorphe Funktion, die wir mit

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

notieren.–

Aus 16.4 und unseren Überlegungen im Vorspann von 16.5 folgt sofort:

16.6 Satz und Definition: Seien $z_0 \in \mathbb{C}, 0 \leq r < R < \infty, f \in \mathcal{O}\big(D(z_0, r, R)\big)$. Dann gibt es eine Laurentreihe $L = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu (z - z_0)^\nu$ mit $D(z_0, r, R) \subset K_L$ und

$$(*) \quad f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu \text{ auf } D(z_0, r, R).$$

L heißt die *Laurentreihe* von f auf $D(z_0, r, R)$. $(*)$ heißt die *Laurentdarstellung* von f auf $D(z_0, r, R)$. L ist eindeutig bestimmt; genauer: Ist $r < \varrho < R$, so ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(z_0, \varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \quad \forall k \in \mathbb{Z}.–$$

17 Isolierte Singularitäten

17.1 Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $z_0 \in U$, $U^* := U \backslash \{z_0\}$. Ist $f \in \mathcal{O}(U^*)$, so sagt man, z_0 ist eine *isolierte Singularität* von f.–

Beispiele:

$\frac{\sin z}{z}$ hat eine isolierte Singularität in 0,

$\frac{1}{1-z^2}$ hat eine isolierte Singularität in 1 und in -1, $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ hat eine isolierte Singularität in 0.

Im weiteren seien U, z_0, U^* wie in 17.1.

17.2 Definition: Sei $D(z_0, 0, R) \subset U^*$ und sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Auf $D(z_0, 0, R)$ besitzt f eine Laurentdarstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu.$$

- z_0 heißt eine *hebbare Singularität* von f, wenn der Hauptteil Null ist, also $a_\nu = 0$ für $\nu \leq -1$.
- z_0 heißt ein *Pol* von f, wenn es ein $n \leq 1$ gibt mit $a_n \neq 0$ und $a_\nu = 0$ für $\nu < n$.
- z_0 heißt eine *wesentliche Singularität* von f, wenn es eine unendliche Teilmenge N von $\{\nu \in \mathbb{Z} : \nu \leq -1\}$ gibt mit $a_\nu \neq 0$ für $\nu \in N$.–

Man kann den Typ einer Singularität auch durch das Werteverhalten von f beschreiben.

17.3 Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. z_0 ist eine hebbare Singularität.
2. f ist nach z_0 holomorph fortsetzbar.
3. f ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt.–

$\frac{\sin z}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität.

17.4 Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. z_0 ist ein Pol.
2. Es existiert ein $h \in \mathcal{O}(U)$ und ein $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ mit $h(z_0) \neq 0$,
$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \cdot h(z) \text{ auf } U^*.$$
3. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.–

"17.4 (3) $\Rightarrow$ 17.4 (2)" folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstrass, der nun folgt:

17.5 Satz von Casorati-Weierstraß: Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. z_0 ist eine wesentliche Singularität.
2. Zu jeder Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ in U^* mit $a_\nu \to z_0$ und
$$f(a_\nu) \to w_0.–$$

17.6 Definition: Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$, und sei z_0 ein Pol von f. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl m aus 17.4 die *Polstellenordnung* von f in z_0.–
Wir schreiben für m auch $\mathrm{ord}_{z_0} f$.
Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + z}$$

hat je einen Pol 1. Ordnung in 1 und -1.
Die Funktion $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität in 0.

17.7 Definition: Die Elemente aus $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißen *ganze* Funktionen . Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ kein Polynom, so heißt f eine *ganze transzendente* Funktion .–
Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dann ist $g(z) := f(\frac{1}{z}) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, besitzt also eine isolierte Singularität in 0. f ist genau dann ein Polynom, wenn diese eine hebbare Singularität oder ein Pol ist.

D.f.

17.8 Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dann gilt: f ist ein Polynom. $\Leftrightarrow$ In $\hat{\mathbb{C}}$ existiert $\lim_{z \to \infty} f(z)$.–
Ist in 17.8 $\lim_{z \to \infty} \in \mathbb{C}$, so ist f nach dem Satz von LIOUVILLE konstant. Ist $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$, so ist f ein nicht-konstantes Polynom. Beachte daneben auch 13.18.
Sei $N \subset U$. N heißt eine *diskrete* Teilmenge von U, wenn N keinen Häufungspunkt in U besitzt. Man zeigt dann sofort: $U \backslash N$ ist offen, und $U \backslash N$ ist zusammenhängend, wenn U es ist.

17.9 Definition: f heißt eine *meromorphe Funktion* auf U, wenn es eine diskrete Teilmenge N von U gibt mit folgenden Eigenschaften:

1. $f \in \mathcal{O}(U \backslash N)$;
2. ist $z_0 \in N$, so ist z_0 eine hebbare Singularität oder ein Pol von f.

N heißt dann die *Singularitätenmenge* von f.–
Natürlich ist $N = \varnothing$ zugelassen. Ist f eine meromorphe Funktion auf U, so wollen wir f (gemäß einer Äquivalenzrelation) identifizieren mit der Funktion, welche wir bei holomorpher Fortsetzung von f in die hebbaren Singularitäten erhalten. Für die so fortgesetzte Funktion besteht die Singularitätenmenge aus lauter Polen. Bei dieser Form der Identifikation ergibt sich: Sind f und g meromorphe Funktionen auf U mit Singularitätenmengen N bzw. M, so gilt:

$$
\begin{aligned}
f = g \Leftrightarrow\ & f|U\backslash(N \cup M) = g|U\backslash(N \cup M) \text{ (im strengen Sinne)} \\
\Leftrightarrow\ & \text{Zu jeder Zusammenhangskomponente } U' \text{ von } U \text{ gibt es eine nichtleere} \\
& \text{offene Teilmenge } V' \text{ von } U'\backslash(N \cup M) \text{ mit } f|V' = g|V' \text{ (im strengen Sinne).}
\end{aligned}
$$

Genau genommen, müßte man eine Äquivalenzrelation einführen und eine meromorphe Funktion dann als eine Äquivalenzklasse ansehen.

17.10 Bezeichnungen: Mit $\mathcal{M}(U)$ bezeichnen wir die Menge der meromorphen Funktionen auf U.–

Seien $f, g \in \mathcal{M}(U)$ mit Singularitätenmengen N bzw. M. Dann sei

$$f \pm g, f \cdot g : U\backslash(N \cup M) \to \mathbb{C},$$

$$
\begin{aligned}
\big(f \pm g\big)(z) &:= f(z) \pm g(z), \\
\big(f \cdot g\big)(z) &:= f(z) \cdot g(z).
\end{aligned}
$$

17.11 Satz: $\mathcal{M}(U)$ ist mit $+, \cdot$ ein Ring.–

17.12 Satz: Sei $U = G$ ein Gebiet. Dann ist $\mathcal{M}(G)$ ein Körper.–

Noch einmal zurück zum Anfang!

17.13 Definition: Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$ wie in Definition 17.2. Der Koeffizient a_{-1} heißt das *Residuum* von f in z_0. Ist $0 < r < R$, so gilt mit 16.6

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(z_0,r)} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta.$$

Wir notieren a_{-1} als $\mathrm{res}_{z_0} f$.–

Kapitel 6

Integration und Homotopie

18 Verallgemeinerung des Integralbegriffes

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein CAUCHY-Gebiet (vgl. 8.8). Dann besitzt jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ eine Stammfunktion $F \in \mathcal{O}(H)$. Seien $z_1, z_2 \in G$. Dann gilt für jeden Integrationsweg γ mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2:

$$(*) \qquad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = [F]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

Es bietet sich an $(*)$ als Integraldefinition für beliebige Wege $\gamma : [a,b] \to G$ in G mit $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ zu benutzen, wobei nicht verlangt ist, daß γ stückweise stetig differenzierbar ist, also

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := [F]_{z_1}^{z_2}.$$

Ja, man könnte sogar – unabhängig von Verbindungswegen

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z := [F]_{z_1}^{z_2}$$

definieren. Allerdings ist diese Definition ein wenig problematisch, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei f eine Funktion $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}^*$ ist kein CAUCHY-Gebiet, aber

$$G_1 := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \text{ und } G_2 := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$$

sind CAUCHY-Gebiete. Sei $z_1 = -\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$. Dann ist, bei Rechnung in G_1,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}$$

und, bei Rechnung in G_2

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = -\pi\mathrm{i}\ .$$

Es ist wichtig, ob man bei der Integralberechnung rechts oder links an 0 vorbeiläuft.

Das beschriebene Problem tritt nicht auf, wenn man einen – nicht notwendig stückweise stetig differenzierbaren – Weg zugrundelegt:

18.1 Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ Bereiche und sei

$$\gamma : [a,b] \to U_1 \cap U_2$$

ein Weg. Sind dann f_1, f_2 holomorphe Funktionen auf U_1 bzw. U_2 mit Stammfunktionen F_1 bzw. F_2, so gilt, wenn $f_1|U_1 \cap U_2 = f_2|U_1 \cap U_2$ ist

$$[F_1]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = [F_2]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}.–$$

18.2 Satz und Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Dann gibt es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

des Intervalls $[a,b]$ und CAUCHY-Gebiete $H_0, \ldots, H_{n-1}$ (z.B. offene Kreisscheiben) mit $\mathrm{Sp}\big(\gamma|[t_{k-1}, t_k]\big) \subset H_{k-1}$. Wir nennen $(t_0, \ldots, t_n; H_0, \ldots, H_{n-1})$ eine CAUCHY-Zerlegung zu γ und U. Ist $f \in \mathcal{O}(U)$, so existiert zu jedem H_{k-1} eine Stammfunktion F_{k-1} von f. $(F_0, \ldots, F_{n-1})$ heißt eine zur CAUCHY-Zerlegung gehörige Sequenz von Stammfunktionen von f.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{n} [F_{k-1}]_{\gamma(t_{k-1})}^{\gamma(t_k)}$$

heißt das *Wegintegral* über f längs γ.–

Ist γ ein Integrationsweg, so liefern das neue und das alte Integral denselben Wert. Die Existenz einer CAUCHY-Zerlegung folgt sofort aus der Kompaktheit von $[a,b]$. Natürlich muß man zeigen, daß die neue Integraldefinition weder von der gewählten CAUCHY-Zerlegung noch von der gewählten Sequenz von Stammfunktionen abhängt.

Man zeigt sofort:

18.3 Rechenregel: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Sind $f, g \in \mathcal{O}(U)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist

$$\int_\gamma \big(\alpha f + \beta g\big)(z)\ \mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z. –$$

Die Transformationsformel 7.14 überträgt sich ebenfalls:

18.4 Transformationsformel: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Außerdem sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} = \begin{cases} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z & \text{, falls } \varphi \text{ positiv ist,} \\ -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z & \text{, falls } \varphi \text{ negativ ist} \end{cases} .–$$

Man kommt bei 18.4 auch mit einem schwächeren Begriff von Parametertransformation aus: Man kann in 7.12 (2) „stetig differenzierbar“ durch „stetig“ ersetzen!

Wie in 7 folgt aus 18.4:

18.5 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und seien γ_1, γ_2 Wege in U. γ_2 sei mit γ_1 kombinierbar. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z. –$$

18.6 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei γ ein Weg in U. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_{-\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z. –$$

Die Übertragung der Sätze 7.20, 7.21 und 7.22 geschieht mit einem kleinen Trick:

18.7 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg. Sei $(t_0, \ldots, t_n; H_0, \ldots, H_n)$ eine CAUCHY-Zerlegung zu γ und U, wobei alle H_k konvexe Gebiete, z.B. offene Kreissscheiben sind. Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(U)$:

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{[z_0, z_1, \ldots, z_n]} f(z)\ \mathrm{d}z$$

mit $z_k := \gamma(t_k)$.–

Aus 18.7 und 7.20, 7.21 bzw. 7.22 folgt:

18.8 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei γ ein Weg in U. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf U, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt:

$$\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \to \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.–$$

18.9 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei γ ein Weg in U. Sei ferner $V \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : U \times V \to \mathbb{C}$ stetig, und für $w \in V$ sei $f(\cdot, w) \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z : V \to \mathbb{C}$$

stetig.–

18.10 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und sei γ ein Weg in U. Sei ferner $V \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : U \times V \to \mathbb{C}$ stetig. Darüberhinaus gelte

1. $\forall z \in U$ ist
$$f(z,\cdot) : V \to \mathbb{C} \text{ holomorph},$$
$\forall w \in V$ ist
$$f(\cdot, w) : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph;}$$

2. die Funktion
$$\frac{\partial f}{\partial w} : U \times V \to \mathbb{C},$$
$$\frac{\partial f}{\partial w}(z,w) := \big(f(z,\cdot)\big)'(w)$$
ist stetig,
$\forall w \in V$ ist
$$\frac{\partial f}{\partial w}(\cdot, w) : U \to \mathbb{C}$$
holomorph.

Dann ist

$$\int_\gamma f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z : U \to \mathbb{C}$$

holomorph und

$$\left(\int_\gamma f(z,\cdot)\,\mathrm{d}z\right)'(w) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial w}(z,w)\,\mathrm{d}z.–$$

In 18.10 genügt übrigens allein die Bedingung 1; die Bedingung 2 ist überflüssig. Zum Beweis benötigt man allerdings einen tiefen Satz der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher.

Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

18.11 Definition: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$. Dann heißt

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\zeta$$

die *Umlaufzahl* von γ bzgl. z_0.–

Wir halten fest:

18.12 Satz: Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl.–

18.13 Satz: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Dann ist $n(\gamma, \cdot)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$ konstant. $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$ besitzt genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente Z_∞. Auf dieser ist $n(\gamma, \cdot)$ gleich Null.–

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. γ heißt *einfach geschlossen*, wenn $\gamma | [a, b[$ injektiv ist.

Die folgende Aussage – sie heißt JORDAN*scher Kurvensatz* – ist anschaulich völlig klar, gleichwohl aber schwer zu beweisen.

18.14 Satz: Sei γ ein einfach geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Dann hat $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$ genau zwei Zusammenhangskomponenten Z_b und Z_∞. Dabei ist $n(\gamma, Z_b) \in \{1, -1\}$.–

Ist $n(\gamma, Z_b) = 1$, so sagen wir, γ habe positiven Umlaufsinn. Dann „liegt Z_b beim Durchlaufen von γ zur linken Seite“. Z_b heißt die *beschränkte Komponente* von $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$.

19 Integration und Homotopie

19.1 Definition: Seien

$$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$$

Wege mit

$$\begin{aligned} \gamma_0(a) = \gamma_1(a) &:= z_0, \\ \gamma_0(b) = \gamma_1(b) &:= z_1. \end{aligned}$$

Unter einer *Homotopie* von γ_0 nach γ_1 verstehen wir eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

mit:

1. $\gamma(0,\cdot) = \gamma_0, \gamma(1,\cdot) = \gamma_1$;
2. $\gamma(\cdot,a) = z_0, \gamma(\cdot,b) = z_1$.

$$\mathrm{Sp}\,\gamma := \gamma\big([0,1] \times [a,b]\big)$$

heißt die *Spur* von γ.
Für $s \in [0,1]$ sei $\gamma_s := \gamma(s,\cdot)$.
Existiert eine Homotopie von γ_0 nach γ_1, so sagen wir, γ_0 und γ_1 seinen *homotop* und schreiben

$$\gamma_0 \underset{U}{\sim} \gamma_1 .-$$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich mit Sp $\gamma_0 \cup$ Sp $\gamma_1 \subset U$. Existiert eine Homotopie γ von γ_0 nach γ_1 mit Sp $\gamma \subset U$, so sagen wir γ_0 und γ_1 seinen in U homotop und schreiben $\gamma_0 \sim \gamma_1$.–
19.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to G$ Wege mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a), \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Dann ist

$$\gamma_0 \underset{G}{\sim} \gamma_1 .-$$

Der zentrale Satz dieses Paragraphen lautet:

19.2 Monodromiesatz Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in \mathcal{O}(U)$. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ Wege in U mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = z_0, \gamma_0(b) = \gamma_1(b) = z_1$, die in U homotop sind, so ist

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z .-$$

19.3 Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in U, $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = z_0$. γ_0 heißt in U *zusammenziehbar*, wenn es eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] \times [a,b] \to U$$

gibt mit folgenden Eigenschaften:

1. $\gamma(0,\cdot) = \gamma_0$,

2. $\gamma(1, \cdot)$ ist konstant,

3. $\gamma(\cdot, a) = \gamma(\cdot, b)$.–

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Für konstanten Weg

$$[a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 \quad \forall t \in [a, b],$$

schreiben wir $\gamma = z_0$.–

19.4 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, und sei $\gamma_0 : [a, b] \to U$ ein geschlossener Weg in U, $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = z_0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. γ_0 ist in U auf einen Punkt zusammenziehbar.

2. $$\gamma_0 \underset{U}{\sim} z_0.–$$

Aus dem Monodromiesatz 19.2 folgt dann:

19.5 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Sei γ ein geschlossener Weg in U, der in U zusammenziehbar ist. Dann gilt:

$$\int\limits_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.–$$

Aus 19.5 folgt die *allgemeine* CAUCHY*sche Integralformel*:

19.6 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in \mathcal{O}(U)$. Sei γ ein geschlossener Weg in U, der in U zusammenziehbar ist. Dann gilt:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \quad \forall z \in U \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma.–$$

19.7 Satz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f \in \mathcal{O}(U)$. Sei γ ein einfach geschlossener Weg in U, der in U zusammenziehbar ist. γ habe positiven Umlaufsinn. Bezeichne Z_b die beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}\, \gamma$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \quad \forall z \in Z_b.–$$

19.8 Definition: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg γ in G auch in G zusammenziehbar ist.–

Aus 19.5 folgt:

19.9 Satz: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein CAUCHY- Gebiet.–

19.10 Definition und Beispiel Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. G heißt ein *sternförmiges Gebiet*, wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt mit:

$$\mathrm{Sp}\,[z_0, z] \subset G \quad z \in G.$$

Jedes sternförmige Gebiet ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.–

20 Residuensatz

In diesem Paragraphen sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich und N eine diskrete Teilmenge von U. Sei $U^* := U \backslash N$. Ist $f \in \mathcal{O}(U^*)$, so besitzt f in jedem Punkt $z_0 \in N$ ein Residuum $\mathrm{res}_{z_0} f$ (vgl. 17.13).

20.1 Residuensatz Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Sei γ ein geschlossener Weg in U^*, der in U zusammenziehbar ist. Dann gilt:

$$\{z \in N : n(\gamma, z) \neq 0\} \text{ ist endlich.}$$

und

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{z \in N} \mathrm{res}_z f \cdot n(\gamma, z).–$$

Aus 20.1 folgt sofort:

20.2 Satz: Sei γ ein einfach geschlossener Weg in U^*, der in U zusammenziehbar ist. γ habe positiven Umlaufsinn. Sei $f \in \mathcal{O}(U^*)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{z \in Z_b \cap N} \mathrm{res}_z f.–$$

Der Residuensatz, insbesondere in der speziellen Fassung 20.2 hat viele Anwendungen.

Wir behandeln zunächst eine praktische Anwendung.

20.3 Satz: Sei $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle rationale Funktion (ohne Pole auf $\mathbb{R}$). Der Grad des Nenners sei nun mindestens 2 größer als der der Zählers. Dann ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\ sum_{\substack{\mathrm{Im}\ z>0\\ z\ \mathrm{Pol}}} \mathrm{res}_z R. -$$

Im weiteren sei $U = G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und γ sei ein einfach geschlossener Weg in G, der in G zusammenziehbar sei. γ habe positiven Umlaufsinn.

Mit Z_b bezeichnen wir die beschränkte Komponente von γ. Ist M eine diskrete Teilmenge von G, so ist auch $G\backslash M$ ein Gebiet.

Im weiteren sei $f \in \mathcal{M}(G)$, f sei nicht konstant.

Die Menge P der Pole von f ist eine diskrete Teilmenge von G, ebenso die Menge N der Nullstellen von f. Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann ist auch die Menge $N_w := f^{-1}\big(\{w\}\big)$ eine diskrete Teilmenge von G. Ist $z_0 \in P$, so sei $f(z_0) := \infty$.

20.4 Satz: Sei $z_0 \in P \cup N$. Dann ist

$$\mathrm{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{ord}_{z_0} f & \text{, falls } z_0 \in N, \\ -\mathrm{ord}_{z_0} f & \text{, falls } z_0 \in P \end{array} \right\}. -$$

20.5 Satz: Sei $w \in \mathbb{C}$. Es gelte:

$$\mathrm{Sp}\ \gamma \cap (P \cup N_w) = \varnothing.$$

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,\mathrm{d}z = \sum_{z \in Z_b \cap N_w} \mathrm{ord}_z f - \sum_{z \in Z_b \cap P} \mathrm{ord}_z f. -$$

20.6 Satz: Sei $F \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant, sei $z_0 \in G$. Dann ist

$$F(z_0) \cdot \mathrm{ord}_{z_0} = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{res}_{z_0} F \cdot \frac{f'}{f} & \text{, falls } z_0 \in N, \\ -\mathrm{res}_{z_0} F \cdot \frac{f'}{f} & \text{, falls } z_0 \in P \end{array} \right. . -$$

Wie im Fall 20.5 folgt:

20.7 Satz: Sei $F \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant und sei $w \in \mathbb{C}$. Es gelte:

$$\mathrm{Sp}\ \gamma \cap (P \cup N_w) = \infty.$$

Dann ist
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, \mathrm{d}z = \sum_{\substack{z\in Z_b\\ z\in N_w}} \mathrm{ord}_z f - \sum_{\substack{z\in Z_b\\ z\in P}} \mathrm{ord}_z f. -$$

Eine interessante Folgerung aus 20.7 ist die folgende *Umkehrformel*:

20.8 Satz: Sei $f \in \mathcal{O}(G)$ und injektiv. Dann gilt für alle $w \in f(Z_b)$:
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, \mathrm{d}z. -$$

Kapitel 7

Komplexe Abbildungstheorie

21 Einige abbildungstheoretische Folgerungen aus dem Residuensatz

In diesem Paragraphen sei $G \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.
Wir beginnen mit dem Satz von Hurwitz:

21.1 Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{O}(G)$. Es gelte $f_n(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$. Dann folgt für $f := \lim f_n$ entweder 1 oder 2:

1. $f(z) = 0 \quad \forall z \in G$;
2. $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$.–

Sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt:
f ist lokal biholomorph $\Leftrightarrow f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ (vgl. 14.8).

Aus 21.1 folgt sofort:

21.2 Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{O}(G)$. Jedes f_n, $n \in \mathbb{N}$, sei lokal biholomorph. Dann folgt für $f := \lim f_n$ entweder 1 oder 2:

1. f ist konstant;
2. f ist lokal biholomorph.–

21.3 Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{O}(G)$. Jedes f_n, $n \in \mathbb{N}$, sei injektiv. Dann folgt für $f := \lim f_n$ entweder 1 oder 2:

1. f ist konstant;

2. f ist injektiv.–

22 Automorphismen des Einheitskreises

22.1 Satz und Definition Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein *Automorphismus* von G ist eine biholomorphe Abbildung

$$f : G \to G.$$

Sei

$$\text{Aut } G := \{f : f : G \to G \text{ istein Automorphismus.}\}$$

Aut G ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathbb{S}(G)$ der Permutationen von G.
Insbesondere ist dann Aut G mit $\circ$ eine Gruppe.–
Sei $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Dann ist $f(z) = c \cdot z$ ein Automorphismus von D.

22.2 Satz: Sei $f \in \text{Aut } D, f(0) = 0$. Dann ist f von der Form $f(z) = c \cdot z$ mit $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.–

Es gilt also:

22.3

$$\{f \in \text{Aut } D : f(0) = 0\} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta_0} z : \vartheta_0 \in \mathbb{R} \right\}.–$$

22.4 Sei $z_0 \in D$. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z},$$

ein Automorphismus von D.–

22.5 Satz:

$$\text{Aut } D = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta_0} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} : z_0 \in D, \vartheta_0 \in \mathbb{R} \right\}.–$$

23 Charakterisierung der Cauchy-Gebiete, der Riemannsche Abbildungssatz

23.1 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Cauchy-Gebiet. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$:

1. Es existiert ein $h \in \mathcal{O}(G)$ mit $f = \mathrm{e}^h$.

2. Es existiert ein $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $f = g^2$.–

23.2 Definition: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. G heißt ein *W-Gebiet* (oder „Wurzel-Gebiet“) , wenn es zu jeder Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$ ein $g \in \mathcal{O}(G)$ gibt mit $f = g^2$. Wir schreiben dann $\sqrt{f}$ für g.–
Offensichtlich gibt es genau zwei Funktionen $g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g^2 = f$. g ist „bis aufs Vorzeichen“ eindeutig bestimmt.

23.3 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. G ist einfach zusammenhängend.

2. G ist ein Cauchy-Gebiet.

3. G ist ein W-Gebiet.

4. Es existiert eine biholomorphe Abbildung

$$f : G \to D.–$$

Die Folgerung (1) $\Rightarrow$ (4) heißt Riemann*scher Abbildungssatz*.
Weil $\mathbb{C}$ sowohl einfach zusammenhängend als auch ein Cauchy-Gebiet ist, folgt aus 23.3:

23.4 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt: G ist ein Cauchy-Gebiet. $\Leftrightarrow$ G ist einfach zusammenhängend.–
Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen geht es um den Beweis von 23.3. Dabei haben wir bisher folgendes gezeigt:
(1) $\Rightarrow$ (2) (vgl. Satz 19.8),
(2) $\Rightarrow$ (3) (vgl. Satz 23.1).
Es folgt (1) trivialerweise aus (4). Zu zeigen ist also (3) $\Rightarrow$ (4).
Wir benötigen einige Vorbereitungen.

23.5 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein W-Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$, $g = \sqrt{f}$. Dann gilt:
Ist f injektiv, so auch g, und es ist

$$g(G) \cap \bigl(-g(G)\bigr) = \varnothing.–$$

23.6 Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete und sei $\varphi : G \to H$ biholomorph. Dann gilt: Ist G W-Gebiet, so auch H.–

23.7 Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein W-Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann gibt es ein W-Gebiet $G_0 \subset D$ mit $0 \ni G_0$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : G \to G_0$.–

23.8 Satz von Koebe: Sei $G_0 \subset D$ ein W-Gebiet mit $0 \in G_0 \neq D$. Dann existiert eine Funktion $k \in \mathcal{O}(G_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $k(G_0) \subset D, k(0) = 0$.
2. k ist injektiv.
3. $|k(z)| > |z| \quad \forall z \in G_0, z \neq 0$.–